FM210 - Tutorato 4
Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Guido Gentile
Tutore: Shulamit Terracina

23 Marzo 2021

Esercizio 1 Sia dato il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = 2(1 - \cos x) + \cos(2x), \quad x \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi.$$

1. Si studi la funzione $V(x)$.
2. Si studino qualitativamente le curve di livello dell'energia del corrispondente sistema dinamico.
3. Si dimostri che la traiettoria con dato iniziale $(x, \dot{x}) = (-\frac{2\pi}{3}, 0)$ è periodica e se ne scriva il periodo della traiettoria del punto come integrale definito.

Esercizio 2 [Esonero 2007/2008] Sia dato il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza

$$F(x) = -\alpha x + \beta x^5, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Al variare dei parametri α e β rispondere alle seguenti domande:

1. Scrivere l'equazione del moto e le equazioni che definiscono il sistema dinamico associato.
2. Determinare i punti d'equilibrio del sistema dinamico e discuterne la stabilità.
3. Discutere qualitativamente il moto nel piano $(x, y) = (x, \dot{x})$.
4. Determinare sotto quali condizioni sui parametri (α, β) la traiettoria con condizioni iniziali $(x(0), y(0)) = (0, 1)$ è periodica.
5. Per tali valori di (α, β) scriverne il periodo come integrale definito. Calcolarlo esplicitamente per $\beta = 0$

Esercizio 3 Il pendolo su piano ruotante
Si consideri il moto

$$mR^2\ddot{\theta} = -Rmg\sin\theta + m^2R^2\Omega^2\sin\theta\cos\theta$$

dove θ è un angolo, $m > 0$ la massa, $R > 0$ una lunghezza, $g \geq 0$ un'accelerazione e Ω una frequenza.
Questa equazione descrive un pendolo, cioè un punto materiale di massa m su un estremo di un'asta di lunghezza R con l'altro estremo fissato, soggetta alla forza di gravità, su di un piano verticale che ruota con velocità costante di frequenza Ω. L'angolo θ è misurato dalla verticale. Quando $\theta = 0$ il punto materiale si trova nella posizione di minima altezza.
Discuti qualitativamente il moto. In particolare studia l'esistenza e la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\lambda = \frac{g}{R\Omega^2}$. Che dimensioni fisiche ha λ? Disegna il grafico delle posizioni di equilibrio al variare di λ.

Si consideri il dato iniziale $(\theta_0, \dot{\theta}_0) = (-\frac{\pi}{2}, 0)$. Si provi che il moto è periodico e scrivi il periodo dell'orbita.

- In quanto tempo il pendolo arriva in $\theta = \frac{\pi}{2}$?
- Con che $\dot{\theta}$ ci arriva?
- Quanto vale $\dot{\theta}$ quando il pendolo passa per $\theta = 0$?
- Quant'è il valore massimo che $\dot{\theta}$ assume?
- Per quali istanti di tempo $\dot{\theta}$ raggiunge il massimo?
- Quanto vale θ quando $\dot{\theta}$ è massimo?

Esercizio 4 Dati tre vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, il vettore $\mathbf{x} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z})$ e lo scalare $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \wedge \mathbf{z}$ prendono rispettivamente i nomi di *prodotto triplo vettoriale* e *prodotto misto* o *prodotto triplo scalare*

Si dimostri che $\mathbf{x} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z}$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$. (Si noti che il prodotto vettoriale non è associativo cioè $\mathbf{x} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}) \neq (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \wedge \mathbf{z}$).
Si dimostri che $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \wedge \mathbf{z} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$.

Esercizio 5 Si dimostri che nel caso di moti centrali descritti dall'equazione (30.10 [G]) si ha

$$\ddot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{L} = -F(\rho)(\dot{\rho}\mathbf{r} - \rho\dot{\mathbf{r}})$$

[*Hint*: Si usi che $2\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = (d/dt)\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = (d/dt)\rho^2 = 2\rho\dot{\rho}$].