FM210 - Soluzioni Tutorato 4
Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Guido Gentile
Tutore: Shulamit Terracina

23 Marzo 2021

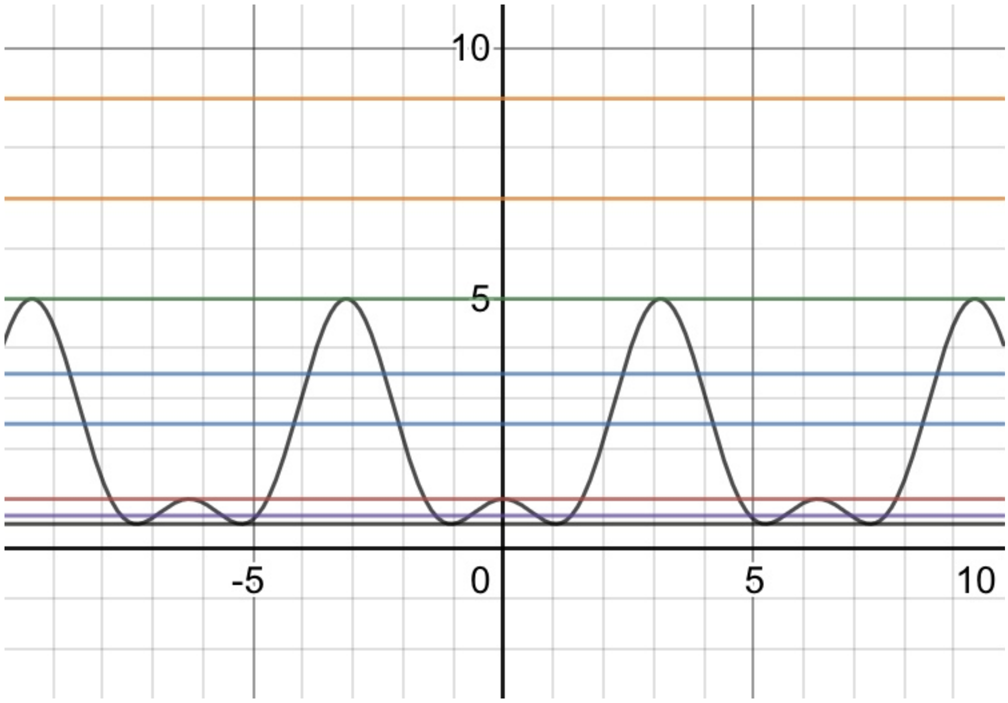
Esercizio 1 Sia dato il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = 2(1 - \cos x) + \cos(2x), \quad x \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi.$$

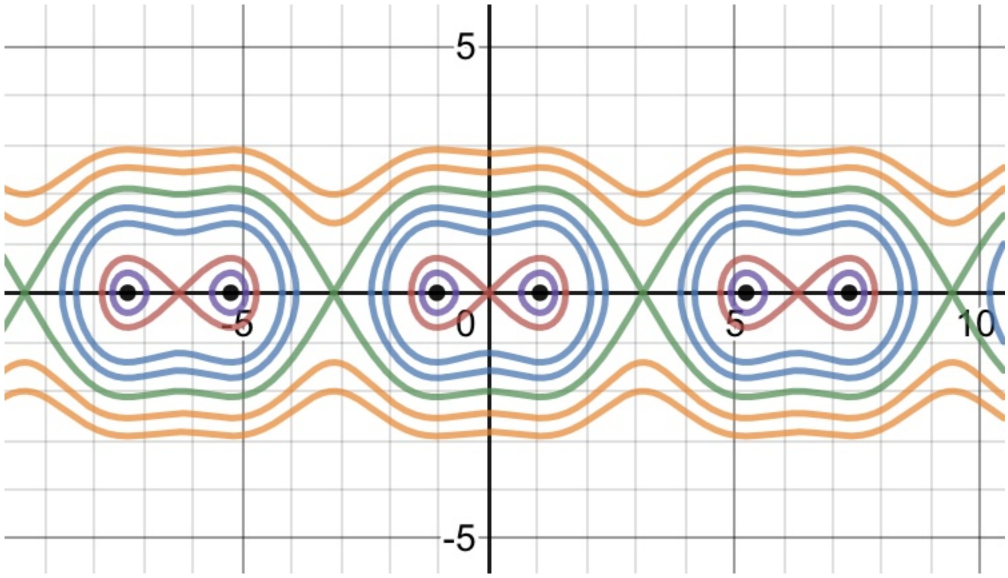
1. Si studi la funzione $V(x)$.
2. Si studino qualitativamente le curve di livello dell'energia del corrispondente sistema dinamico.
3. Si dimostri che la traiettoria con dato iniziale $(x, \dot{x}) = (-\frac{2\pi}{3}, 0)$ è periodica e se ne scriva il periodo della traiettoria del punto come integrale definito.

Soluzione

1. Innanzitutto osserviamo che V è una funzione periodica di periodo 2π ed è pari.
$$V'(x) = 2\sin x - 2\sin 2x$$
La derivata del potenziale si annulla nei punti $x_{0,k} = k\pi$, $x_{1,k} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ e $x_{2,k} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). I punti $x_{0,k}$ sono massimi del potenziale mentre i punti $x_{1,k}$ e $x_{2,k}$ sono minimi del potenziale e pertanto i punti $(x_{0,k}, 0)$ sono punti di equilibrio instabili e i punti $(x_{1,k}, 0)$ e $(x_{2,k}, 0)$ punti di equilibrio stabili.



2. Dividiamo nei soliti casi al variare dell'energia e dei dati iniziali.
    - Se $E = \frac{1}{2}$ e $x(0) = x_{1,k}$ o $x(0) = x_{2,k}$ il moto è fisso sul punto di equilibrio stabile.
    - Se $\frac{1}{2} < E < 1$ e $x(0) \in [2k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$ il moto è chiuso periodico attorno al punto di equilibrio $(x_{1,k}, 0)$ e se $x(0) \in [-\frac{\pi}{2} + k\pi, -2k\pi]$ il moto è chiuso periodico attorno al punto di equilibrio $(x_{2,k}, 0)$.
    - Se $E = 1$ e $x(0) = x_{0,2k}$ il moto è fisso sul punto di equilibrio instabile e se $x(0) \in [-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi]$ il moto è limitato aperiodico e asintotico al punto $(x_{0,2k}, 0)$.
    - Se $1 < E < 5$ e $x(0) \in (-k\pi, k\pi)$ il moto è chiuso periodico attorno ai punti $(x_{1,k}, 0)$ e $(x_{2,k}, 0)$.
    - Se $E = 5$ e $x(0) = x_{0,2k+1}$ il moto è fisso sul punto di equilibrio instabile e se $x(0) \in (-k\pi, k\pi)$ il moto è limitato aperiodico e asintotico ai punti $(x_{0,2k-1}, 0)$ e $(x_{0,2k+1}, 0)$.
    - Se $E > 5$ allora il moto è aperto e periodico.



3. $E(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$. $E(-\frac{2\pi}{3}, 0) = \frac{5}{2}$ e per tale valore dell'energia, dall'analisi fatta al punto precedente, sappiamo che il moto è periodico.

$$T = \sqrt{2}\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{2} - V(x)}}$$

Esercizio 2 [Esonero 2007/2008] Sia dato il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza

$$F(x) = -\alpha x + \beta x^5, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Al variare dei parametri α e β rispondere alle seguenti domande:

1. Scrivere l'equazione del moto e le equazioni che definiscono il sistema dinamico associato.

2. Determinare i punti d'equilibrio del sistema dinamico e discuterne la stabilità.

3. Discutere qualitativamente il moto nel piano $(x, y) = (x, \dot{x})$.

4. Determinare sotto quali condizioni sui parametri (α, β) la traiettoria con condizioni iniziali $(x(0), y(0)) = (0, 1)$ è periodica.

5. Per tali valori di (α, β) scriverne il periodo come integrale definito. Calcolarlo esplicitamente per $\beta = 0$

Soluzione

1. $\ddot{x} = -\alpha x + \beta x^5$ $\begin{cases} y = \dot{x} \\ \dot{y} = -\alpha x + \beta x^5 \end{cases}$

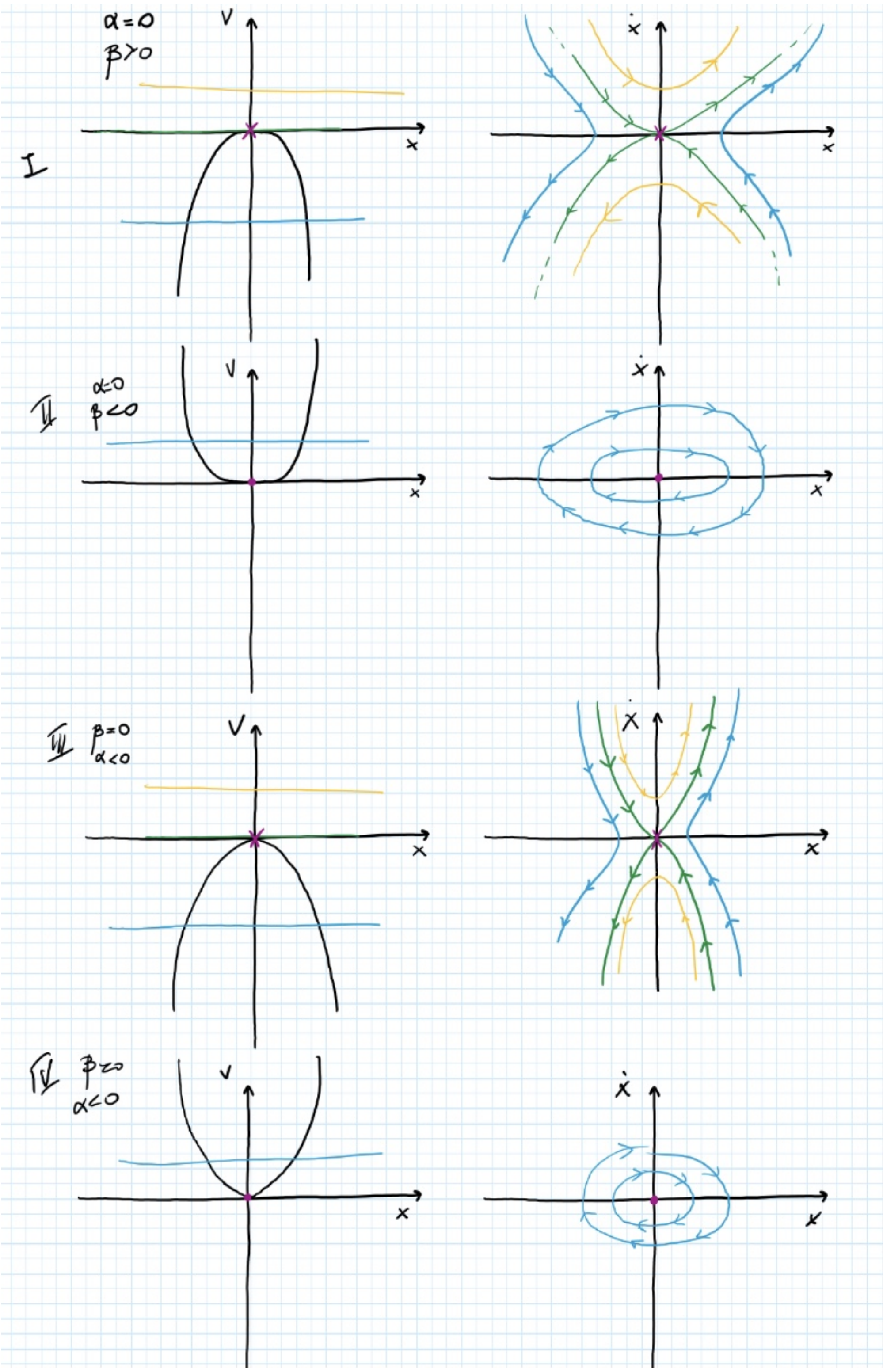
2. $V'(x) = \alpha x - \beta x^5 = x(\alpha - \beta x^4)$.
Analizziamo cosa accade se una tra α o β è nulla. Se $\alpha = 0$ allora $V'(x) = -\beta x^5$ e quindi l'unico punto stazionario è $x = 0$ che è un massimo del potenziale se $\beta > 0$ e minimo se $\beta < 0$. Se $\beta = 0$ allora $V'(x) = \alpha x$ e quindi l'unico punto stazionario è $x = 0$ che è un massimo del potenziale se $\alpha < 0$ e minimo se $\alpha > 0$.
Supponiamo quindi che nessuno dei due parametri sia nullo.
$x = 0$ è uno zero della derivata del potenziale. Per gli altri zeri dobbiamo dividere 2 casi: Se $\alpha\beta < 0$ allora non ce ne sono altri (e quindi l'unico punto stazionario del potenziale è $x = 0$), mentre se $\alpha\beta > 0$ allora $x_\pm = \pm\sqrt[4]{\frac{\alpha}{\beta}}$ sono altri due zeri della funzione. Vediamo quindi che tipo di punti stazionari sono:
$V''(x) = \alpha - 5\beta x^4$. $V''(0) = \alpha$ e $V''(x_\pm) = -4\alpha$. Suddividiamo quindi in ulteriori due casi e otteniamo:

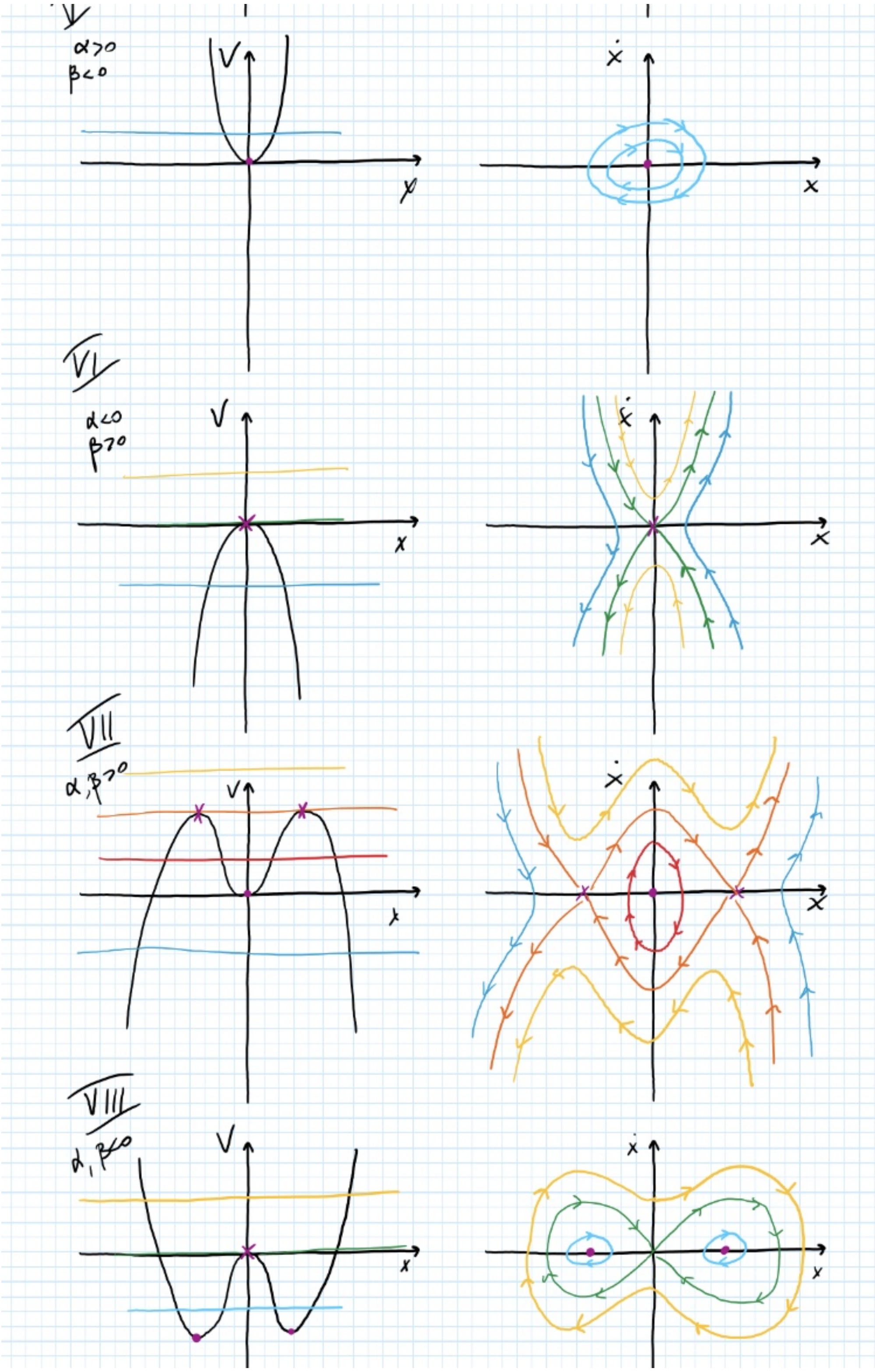
- Se $\alpha, \beta > 0$ allora $x = 0$ è un minimo e $x_\pm$ massimi
- Se $\alpha, \beta < 0$ allora $x = 0$ è un massimo e $x_\pm$ minimi.

Quindi mettendo tutto assieme:

- Se $\alpha = 0$ e $\beta > 0$, $(0, 0)$ è un punto di equilibrio instabile.
- Se $\alpha = 0$ e $\beta < 0$, $(0, 0)$ è un punto di equilibrio stabile.
- Se $\beta = 0$ e $\alpha < 0$, $(0, 0)$ è un punto di equilibrio instabile.
- Se $\beta = 0$ e $\alpha > 0$, $(0, 0)$ è un punto di equilibrio stabile.
- Se $\alpha > 0$ e $\beta < 0$ allora $(0, 0)$ è stabile.
- Se $\alpha < 0$ e $\beta > 0$ allora $(0, 0)$ è instabile.
- Se $\alpha, \beta > 0$ allora $(0, 0)$ è stabile e $(x_\pm, 0)$ sono instabili.
- Se $\alpha, \beta < 0$ allora $(0, 0)$ è instabile e $(x_\pm, 0)$ sono stabili.

3.




V
α>0
β<0
V
x
ẋ
x
VI
α<0
β>0
V
x
ẋ
x
VII
α,β>0
V
x
ẋ
x
VIII
α,β<0
V
x
ẋ
x

4. La traiettoria con condizioni iniziali $(x(0), y(0)) = (0, 1)$ è periodica nei casi II, IV, V, VII (con l'aggiunta della condizione $\alpha > \beta$), VIII.

5. • Caso II: $\alpha = 0$ e $\beta < 0$. $V(x) = \frac{|\beta|}{6}x^6$. $E(1,0) = -\frac{|\beta|}{6}$ e $E(1,0) = -\frac{|\beta|}{6} = \frac{|\beta|}{6}x^6$ in $x = \pm 1$.

$$T = \sqrt{2}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{|\beta|}{6}(1-x^6)}}$$

• Caso IV: $\alpha > 0$ e $\beta = 0$. $V(x) = \frac{\alpha}{2}x^2$. $E(1,0) = -\frac{\alpha}{2}$ e $E(1,0) = -\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}x^2$ in $x = \pm 1$.

$$T = \sqrt{2}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{\alpha}{2}(1-x^2)}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}[\arcsin x]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$$

• Caso V: $\alpha > 0$ e $\beta < 0$.

$$T = \sqrt{2}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{\alpha}{2} + \frac{|\beta|}{6} - \frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{|\beta|}{6}x^6}}$$

• Caso VII: $\alpha > \beta > 0$.

$$T = \sqrt{2}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{6} - \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\beta}{6}x^6}}$$

• Caso VIII: $\alpha > 0$ e $\beta < 0$.

$$T = \sqrt{2}\int_{\sqrt[4]{\frac{|\beta|}{3\alpha}}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{\alpha}{2} + \frac{|\beta|}{6} - \frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{|\beta|}{6}x^6}}$$

Esercizio 3 Il pendolo su piano ruotante
Si consideri il moto

$$mR^2\ddot{\theta} = -Rmg\sin\theta + m^2R^2\Omega^2\sin\theta\cos\theta$$

dove θ è un angolo, $m > 0$ la massa, $R > 0$ una lunghezza, $g \geq 0$ un'accelerazione e Ω una frequenza.
Questa equazione descrive un pendolo, cioè un punto materiale di massa m su un estremo di un'asta di lunghezza R con l'altro estremo fissato, soggetta alla forza di gravità, su di un piano verticale che ruota con velocità costante di frequenza Ω. L'angolo θ è misurato dalla verticale. Quando $\theta = 0$ il punto materiale si trova nella posizione di minima altezza.
Discuti qualitativamente il moto. In particolare studia l'esistenza e la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\lambda = \frac{g}{R\Omega^2}$. Che dimensioni fisiche ha λ? Disegna il grafico delle posizioni di equilibrio al variare di λ.

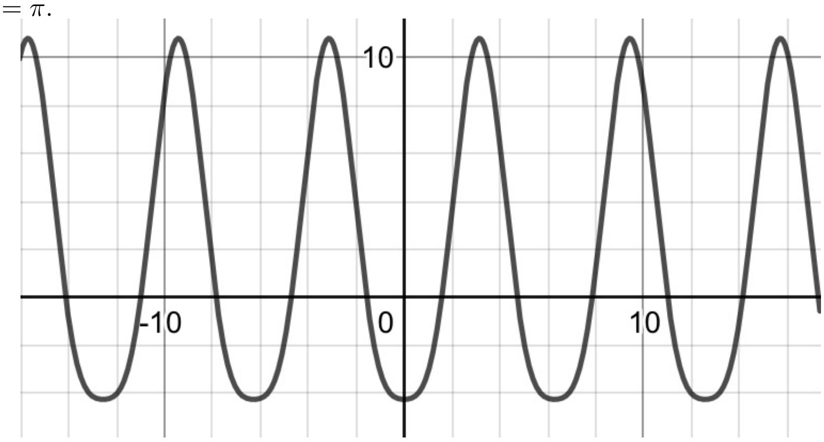
Si consideri il dato iniziale $(\theta_0, \dot{\theta}_0) = (-\frac{\pi}{2}, 0)$. Si provi che il moto è periodico e scrivi il periodo dell'orbita.

- In quanto tempo il pendolo arriva in $\theta = \frac{\pi}{2}$?
- Con che $\dot{\theta}$ ci arriva?
- Quanto vale $\dot{\theta}$ quando il pendolo passa per $\theta = 0$?
- Quant'è il valore massimo che $\dot{\theta}$ assume?
- Per quali istanti di tempo $\dot{\theta}$ raggiunge il massimo?
- Quanto vale θ quando $\dot{\theta}$ è massimo?

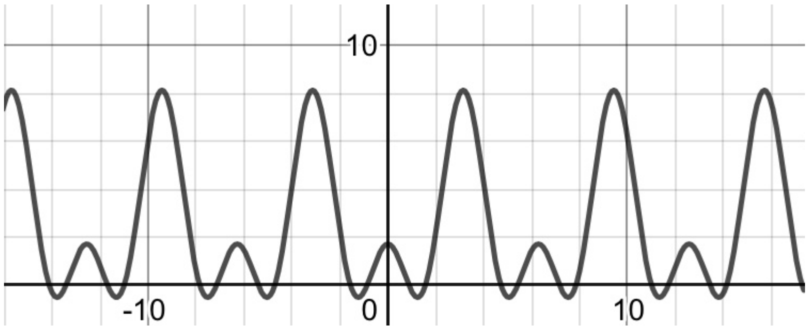
Soluzione Una primitiva in θ della forza assegnata è:

$$V(\theta) = -Rmg\cos\theta + m\frac{R^2\Omega^2}{2}\cos^2\theta.$$

$V'(\theta) = \sin\theta(Rmg - mR^2\Omega^2\cos\theta) = mR^2\Omega^2\sin\theta(\lambda - \cos\theta)$.
Evidentemente, l'esistenza di alcune posizioni di equilibrio dipende dal fatto che λ sia minore o maggiore di 1.
Il parametro λ è adimensionale.
Per $\lambda \geq 1$ ci sono solo la posizione di equilibrio stabile $\theta = 0$ e quella instabile $\theta = \pi$.



Per $\lambda < 1$ compaiono altre due posizioni di equilibrio: $\theta^{\pm} = \pm\arccos\lambda$. Esse sono stabili, mentre $\theta = 0$ è instabile, come si deduce studiando come al solito V.



Il dato iniziale $(\theta_0, \dot{\theta}_0) = (-\frac{\pi}{2}, 0)$ ha energia totale 0.
I livelli dell'energia nei punti di equilibrio sono:

- per $\lambda \geq 1$: $E_1 = -mR^2\Omega^2\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)$ (livello di minimo, $\theta = 0$) e $E_2 = mR^2\Omega^2\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)$ (livello di massimo, $\theta = \pi$).
- per $\lambda < 1$: E_1 diventa un livello di massimo locale, il livello di minimo è $E_3 = -mR^2\Omega^2\frac{\lambda^2}{2}$, che corrisponde alle due soluzioni stazionarie $\theta^{\pm}$.

Dunque $E = 0$ è un livello critico solo se coincide con E_1, il che accade se $\lambda \neq \frac{1}{2}$; in tal caso, essendo $0 < E_2$, l'orbita è periodica e il periodo è:

$$T = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{mR^2}(-V(\theta))}}, \quad \text{se}\, \lambda > \frac{1}{2}$$

$$T = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arccos(2\lambda)} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{mR^2}(-V(\theta))}}, \quad \text{se}\, \lambda < \frac{1}{2}.$$

La posizione $\theta = \frac{\pi}{2}$ è raggiunta solo se $\lambda > \frac{1}{2}$; il tempo è:

$$t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{mR^2}(-V(\theta))}}.$$

Il valore di $\dot\theta$ è dato dalla conservazione dell'energia. Essendo $V(\frac{\pi}{2}) = V(-\frac{\pi}{2})$, $\dot\theta$ deve coincidere con il valore iniziale, cioè $\dot\theta = 0$. Sempre per la conservazione dell'energia, $\dot\theta = \pm\sqrt{\frac{2}{mR^2}(-V(\theta))}$, dunque quando $\theta = 0$, $\dot\theta = \pm\sqrt{-\frac{2}{mR^2}E_1} = \pm\Omega\sqrt{2\lambda - 1}$.

Il valore del massimo $\dot\theta$ è raggiunto quando, lungo l'orbita, $V(\theta)$ è minimo. Se $\lambda \geq 1$ il minimo è raggiunto in $\theta = 0$; se $\lambda < 1$, il minimo è raggiunto in $\theta = \theta^-$.

Esercizio 4 Dati tre vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, il vettore $\mathbf{x} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z})$ e lo scalare $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \wedge \mathbf{z}$ prendono rispettivamente i nomi di *prodotto triplo vettoriale* e *prodotto misto* o *prodotto triplo scalare*

Si dimostri che $\mathbf{x} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z}$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$. (Si noti che il prodotto vettoriale non è associativo cioè $\mathbf{x} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}) \neq (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \wedge \mathbf{z}$).
Si dimostri che $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \wedge \mathbf{z} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$.

Soluzione

$$\mathbf{y} \wedge \mathbf{z} = \begin{pmatrix} y_2z_3 - z_2y_3 \\ y_3z_1 - z_3y_1 \\ y_1z_2 - z_1y_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}) = \begin{pmatrix} x_2(y_1z_2 - z_1y_2) - x_3(y_3z_1 - z_3y_1) \\ x_3(y_2z_3 - z_2y_3) - x_1(y_1z_2 - z_1y_2) \\ x_1(y_3z_1 - z_3y_1) - x_2(y_2z_3 - z_2y_3) \end{pmatrix}$$

Sommando e sottraendo nella prima componente $x_1z_1y_1$, nella seconda componente $x_2z_2y_2$ e nella terza $x_3z_3y_3$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)y_1 - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)z_1 \\ (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)y_2 - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)z_2 \\ (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)y_3 - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)z_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z}$$

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\wedge\mathbf{z} = \mathbf{x}\cdot\begin{pmatrix} y_2 z_3 - z_2 y_3 \\ y_3 z_1 - z_3 y_1 \\ y_1 z_2 - z_1 y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_2 z_3 - x_1 z_2 y_3 + x_2 y_3 z_1 - x_2 z_3 y_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 z_1 y_2$$

Riordinando i termini:

$$y_1 x_3 z_2 - y_1 x_2 z_3 + y_2 x_1 z_3 - y_2 x_3 z_1 + y_3 x_2 z_1 - y_3 x_1 z_2 = \mathbf{y}\cdot\mathbf{z}\wedge\mathbf{x}$$

Analogamente per la seconda uguaglianza

Esercizio 5 Si dimostri che nel caso di moti centrali descritti dall'equazione (30.10 [G]) si ha

$$\ddot{\mathbf{r}}\wedge\mathbf{L} = -F(\rho)(\dot{\rho}\mathbf{r} - \rho\dot{\mathbf{r}})$$

[*Hint*: Si usi che $2\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}} = (d/dt)\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = (d/dt)\rho^2 = 2\rho\dot{\rho}$].

Soluzione

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{r}}\wedge\mathbf{L} &= \ddot{\mathbf{r}}\wedge(\mu\ddot{\mathbf{r}}\wedge\dot{\mathbf{r}}) = (\ddot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}})\mu\mathbf{r} - (\ddot{\mathbf{r}}\cdot\mu\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}} = \\
&= (\mu\ddot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} - (\mu\ddot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}} = (\frac{F(|\mathbf{r}|\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\cdot\dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} - (\frac{F(|\mathbf{r}|\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\cdot\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}} = \\
&= \frac{F(|\mathbf{r}|\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}[(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}}] = \frac{F(\rho)}{\rho}(\rho\dot{\rho}\mathbf{r} - \rho^2\dot{\mathbf{r}}) = F(\rho)(\dot{\rho}\mathbf{r} - \rho\dot{\mathbf{r}})
\end{aligned}$$