

FM210 - Tutorato 5
Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Guido Gentile
Tutore: Shulamit Terracina

30 Marzo 2021

Esercizio 1 Si considerino due punti materiali P_1 e P_2 di massa $m_1 = m_2 = 2$ che interagiscono attraverso forze centrali. In particolare, se \mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2 sono le coordinate dei punti P_1 e P_2 , rispettivamente, le forze che agiscono su P_1 e P_2 sono, rispettivamente,

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2}{|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|} F(|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|), \quad \mathbf{F}_2 = -\frac{\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2}{|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|} F(|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|)$$

dove

$$F(\rho) = -\frac{dV}{d\rho}(\rho), \quad V(\rho) = \frac{\rho^2}{2} + 2 \log \rho$$

1. Si descriva il moto dei due punti nel sistema del centro di massa, in modo da ricondursi a un sistema che si muove in un campo centrale, e si mostri che il sistema che quest'ultimo è un sistema due gradi di libertà, descrivibile attraverso le variabili polari (ρ, θ)
2. Si studi il moto della variabile $\rho(t)$ al variare del momento angolare; in particolare, si determinino i punti di equilibrio, se ne discuta la stabilità e si individuino le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$
3. Si scriva la legge di variazione di $\theta(t)$ in funzione di $\rho(t)$.

Esercizio 2 Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = -\frac{1}{4}\rho^4 + 2\rho$$

1. Scrivere le equazioni di Newton e il sistema dinamico associato.
2. Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
3. Studiare qualitativamente il grafico del potenziale efficace.
4. Analizzare qualitativamente il moto nel piano $(\rho, \dot{\rho})$
5. Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$

Esercizio 3 Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \log \rho - \frac{\alpha}{4\rho^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Si risponda alle domande seguenti al variare del parametro α e del modulo L del momento angolare.

1. Si scriva l'equazione del moto e il sistema dinamico associato.
2. Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
3. Studiare qualitativamente il grafico del potenziale efficace.
4. Analizzare qualitativamente il moto nel piano $(\rho, \dot{\rho})$
5. Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$
6. Si discutano le condizioni sotto le quali in generale il moto complessivo del sistema è periodico

Esercizio 4 In classe avete visto che se $L \neq 0$, l'orbita su cui si svolge il moto in un campo centrale è data dall'equazione

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \pm \frac{\mu\rho^2}{L} \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{eff})},$$

che prende il nome di prima forma dell'equazione delle orbite. Ora, verificate che, posto $u = 1/\rho$, tale equazione si può riscrivere come

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{\mu}{L^2} \frac{d}{du} \left[V\left(\frac{1}{u}\right) \right]$$

che prende il nome di seconda forma dell'equazione delle orbite.