

FM210 - Soluzioni Tutorato 5
Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Guido Gentile
Tutore: Shulamit Terracina

30 Marzo 2021

Esercizio 1 Si considerino due punti materiali P_1 e P_2 di massa $m_1 = m_2 = 2$ che interagiscono attraverso forze centrali. In particolare, se \mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2 sono le coordinate dei punti P_1 e P_2 , rispettivamente, le forze che agiscono su P_1 e P_2 sono, rispettivamente,

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2}{|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|} F(|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|), \quad \mathbf{F}_2 = -\frac{\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2}{|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|} F(|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|)$$

dove

$$F(\rho) = -\frac{dV}{d\rho}(\rho), \quad V(\rho) = \frac{\rho^2}{2} + 2 \log \rho$$

1. Si descriva il moto dei due punti nel sistema del centro di massa, in modo da ricondursi a un sistema che si muove in un campo centrale, e si mostri che il sistema che quest'ultimo è un sistema due gradi di libertà, descrivibile attraverso le variabili polari (ρ, θ)
2. Si studi il moto della variabile $\rho(t)$ al variare del momento angolare; in particolare, si determinino i punti di equilibrio, se ne discuta la stabilità e si individuino le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$
3. Si scriva la legge di variazione di $\theta(t)$ in funzione di $\rho(t)$.

Soluzione

1. Scriviamo innanzitutto le leggi del moto:

$$\begin{cases} 2\ddot{\mathbf{x}}_1 = \frac{\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2}{|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|} F(|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|) \\ 2\ddot{\mathbf{x}}_2 = -\frac{\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2}{|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|} F(|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|) \end{cases}$$

Sommandole e sottraendole otteniamo rispettivamente:

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{x}}_1 - \ddot{\mathbf{x}}_2 = \frac{\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2}{|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|} F(|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|) \\ \ddot{\mathbf{x}}_1 + \ddot{\mathbf{x}}_2 = 0 \end{cases}$$

Definendo quindi il cambio di variabili

$$\begin{cases} \mathbf{R} = \frac{2\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2}{4} = \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2} \\ r = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \end{cases}$$

le equazioni del moto diventano

$$\begin{cases} 4\ddot{\mathbf{R}} = 0 \\ \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} F(|\mathbf{r}|) \end{cases}$$

Quindi la prima descrive un punto materiale di massa $M = m_1 + m_2 = 4$ che si muove di moto rettilineo uniforme (non essendo soggetto a forze), mentre la seconda si può interpretare come equazione del moto di un punto materiale di massa $\mu = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = 1$ (che prende il nome di massa ridotta) sottoposta a una forza centrale. Come sappiamo dalla teoria, la seconda equazione che a priori è tridimensionale è in realtà un sistema a due gradi di libertà. Scegliendo un sistema di coordinate in cui l'asse z è diretto lungo la direzione del vettore momento angolare, si ha $r = (r_1, r_2, 0)$. Possiamo allora introdurre coordinate polari $\rho \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$, ponendo $(r_1, r_2) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$, ed esprimere il modulo del momento angolare in tali coordinate ed ottenere: $\mathbf{L} = (0, 0, L)$ con $L = \mu \rho^2 \dot{\theta} = \rho^2 \dot{\theta}$. A questo punto possiamo finalmente riscrivere le equazioni del moto in funzione delle sole variabili (ρ, θ) :

$$\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}}{d\rho} \quad \text{con} \quad V_{eff} = V(\rho) + \frac{L^2}{2\rho^2} \quad L \neq 0$$

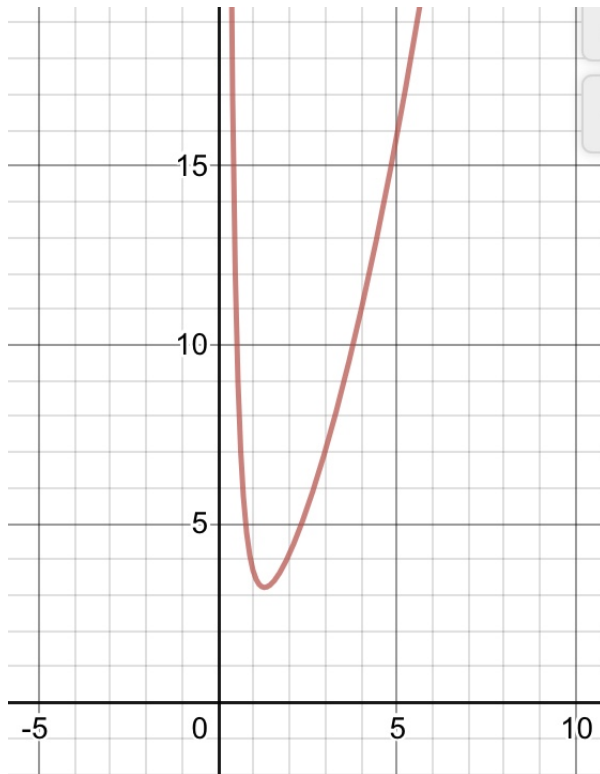
2.

$$V_{eff} = \frac{\rho^2}{2} + 2 \log \rho + \frac{L^2}{2\rho^2}$$

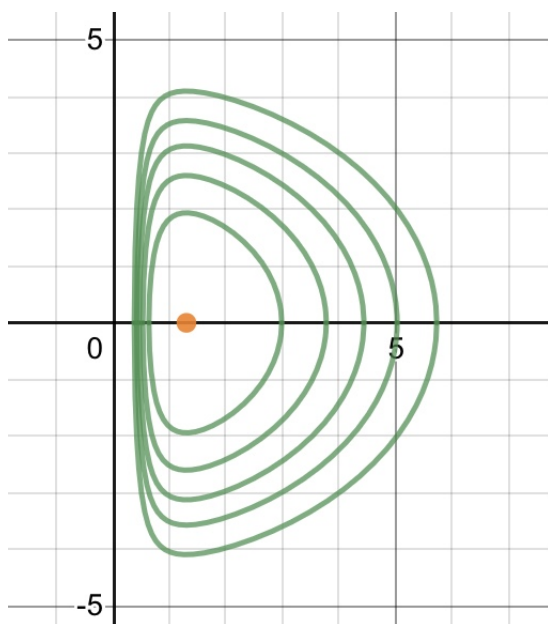
e il sistema dinamico associato è

$$\begin{cases} \dot{\rho} = y \\ \dot{y} - \frac{dV_{eff}}{d\rho} = -\rho - \frac{2}{\rho} + \frac{L^2}{\rho^3} \end{cases}$$

L'unico punto stazionario del potenziale efficace è $\rho_0 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + L^2}}$ che è minimo per ogni valore non nullo di L pertanto il punto $(\rho_0, 0)$ è un punto di equilibrio stabile per ogni valore non nullo di L .



- Se $E = V_{eff}(\rho_0)$ e $\rho(0) = \rho_0$ allora moto fisso.
- Se $E > V_{eff}(\rho_0)$ allora moto chiuso periodico.



3. Poiché $\dot{\theta} = \frac{L}{\rho^2}$ allora

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{L}{\rho^2(s)} ds$$

Esercizio 2 Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = -\frac{1}{4}\rho^4 + 2\rho$$

1. Scrivere le equazioni di Newton e il sistema dinamico associato.
2. Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
3. Studiare qualitativamente il grafico del potenziale efficace.
4. Analizzare qualitativamente il moto nel piano $(\rho, \dot{\rho})$
5. Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$

Soluzione

1. Poiché $m = 1$ il potenziale efficace è dato da

$$V_{eff}(\rho) = -\frac{1}{4}\rho^4 + 2\rho + \frac{L^2}{2\rho^2}, \quad L \neq 0$$

e quindi l'equazione di Newton è

$$\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}}{d\rho} = \rho^3 - 2 + \frac{L^2}{\rho^3}$$

Il sistema dinamico associato è quindi $\begin{cases} \dot{\rho} = y \\ \dot{y} - \frac{dV_{eff}}{d\rho} = \rho^3 - 2 + \frac{L^2}{\rho^3} \end{cases}$

2. Sappiamo che i punti in cui si annulla il campo vettoriale sono tutti e soli i punti della forma $(\rho_0, 0)$ con ρ_0 punto critico del potenziale efficace; pertanto risolvendo l'equazione $V'_{eff}(\rho) = 0$ vediamo che questa ha soluzione se e solo se $L^2 \leq 1$. In particolare avremo quindi:

- Per $L^2 > 1$ nessun punto di equilibrio.
- Per $L^2 = 1$ un solo punto di equilibrio $P_0 = (1, 0)$.
- Per $L^2 \leq 1$ due punti di equilibrio $P_{\pm} = (\rho_{\pm}, 0)$, con

$$\rho_{\pm} = \sqrt[3]{1 \pm \sqrt{1 - L^2}}$$

Derivando ulteriormente il potenziale efficace otteniamo

$$\frac{d^2V_{eff}}{d\rho^2} = -3\rho^2 + \frac{3L^2}{\rho^4}$$

quindi se $L^2 = 1$ avremo che $\frac{d^2V_{eff}}{d\rho^2} < 0 \quad \forall \rho \neq 1$, cioè $\rho = 1$ è un punto di sella del potenziale dunque P_0 è instabile. Per $L^2 > 1$ invece si ha $\frac{d^2V_{eff}}{d\rho^2}(\rho_-) > 0$ quindi ρ_- è un minimo del potenziale e dunque P_- è stabile, viceversa $\frac{d^2V_{eff}}{d\rho^2}(\rho_+) < 0$ quindi ρ_+ è un massimo del potenziale e dunque P_+ è instabile.

3. Indipendentemente dal valore di L si ha

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{eff}(\rho) = -\infty \quad \lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{eff}(\rho) = +\infty$$

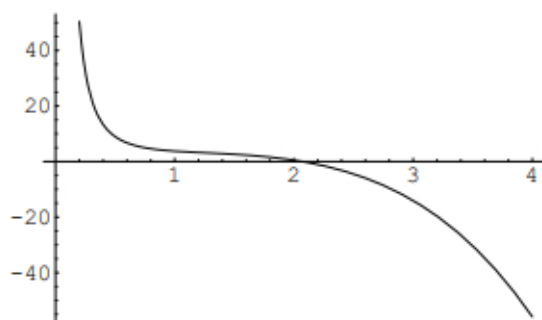


Figura 1: Grafico qualitativo del potenziale efficace per $L^2 > 1$

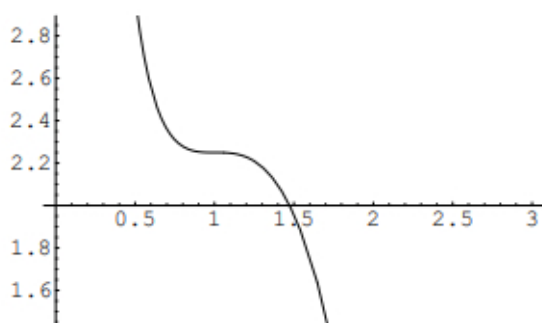


Figura 2: Grafico qualitativo del potenziale efficace per $L^2 = 1$

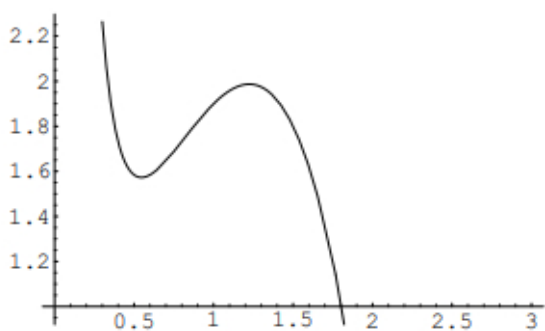


Figura 3: Grafico qualitativo del potenziale efficace per $L^2 < 1$

4. Da $E = y^2/2 + V_{eff}(\rho)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2(A - V_{eff}(\rho))}$. Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse ρ . Suddividiamo il problema in tre casi.

Caso 1 Se $L^2 > 1$ per ogni valore di energia avremo una traiettoria aperta con $\lim_{\rho \rightarrow \infty} y(\rho) = \pm\infty$

Caso 2 Se $L^2 = 1$:

- Per $E < V_{eff}(1)$ avremo una curva aperta con $\lim_{\rho \rightarrow \infty} y(\rho) = \pm\infty$
- Per $E = V_{eff}(1)$ avremo due traiettorie aperte con $\lim_{\rho \rightarrow \infty} y(\rho) = \pm\infty$ e con $\lim_{\rho \rightarrow 1} y(\rho) = 0$ con tangenza orizzontale e il punto d'equilibrio instabile $(1, 0)$.
- Per $E \geq V_{eff}(1)$ avremo una traiettoria aperta con $\lim_{\rho \rightarrow \infty} y(\rho) = +\infty$

Caso 3 Se $L^2 = 1$:

- Per $E < V_{eff}(\rho_-)$ avremo una traiettoria aperta con

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} y(\rho) = \pm\infty$$

- Per $E = V_{eff}(\rho_-)$ avremo una traiettoria aperta con

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} y(\rho) = \pm\infty$$

e con il punto d'equilibrio stabile P_- .

- Per $V_{eff}(\rho_-) < E < V_{eff}(\rho_+)$ avremo una traiettoria aperta con $\lim_{\rho \rightarrow \infty} y(\rho) = \pm\infty$ ed una periodica attorno al punto d'equilibrio stabile P_- .
- Per $E = V_{eff}(\rho_+)$ avremo il punto instabile P_+ , due traiettorie aperte tali che $\lim_{\rho \rightarrow \rho_-} y(\rho) = 0$, $\lim_{\rho \rightarrow \infty} y(\rho) = \pm\infty$ rispettivamente e una traiettoria omoclina al punto instabile con tangenza obliqua.
- Per $E > V_{eff}(\rho_+)$ avremo una traiettoria aperta con

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} y(\rho) = +\infty$$

5. . Per quanto visto al punto precedente si hanno traiettorie periodiche solo nel caso $L^2 < 1$ solo per dati iniziali $\rho_- < \rho < \rho_+$ e valori dell'energia $V_{eff}(\rho_-) < E < V_{eff}(\rho_+)$.

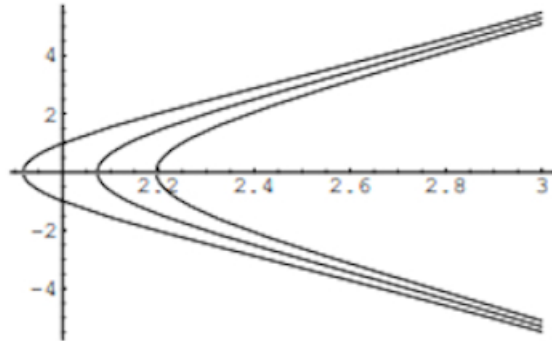


Figura 4: Piano delle fasi per $L^2 > 1$

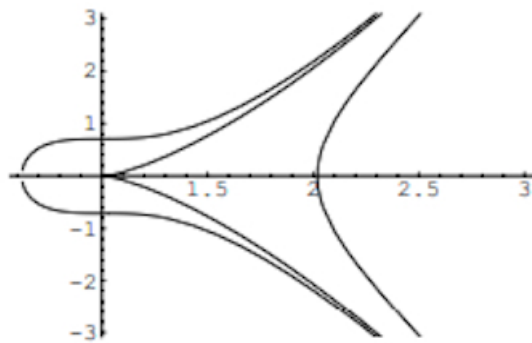


Figura 5: Piano delle fasi per $L^2 = 1$

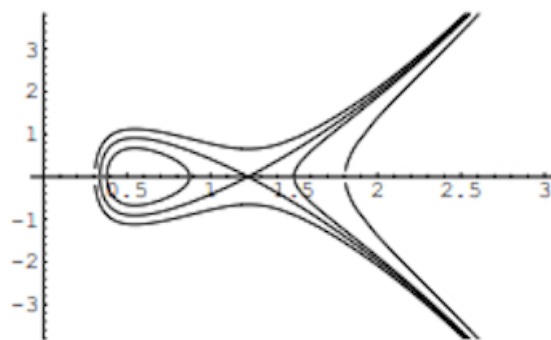


Figura 6: Piano delle fasi per $L^2 < 1$

Esercizio 3 Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \log \rho - \frac{\alpha}{4\rho^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Si risponda alle domande seguenti al variare del parametro α e del modulo L del momento angolare.

1. Si scriva l'equazione del moto e il sistema dinamico associato.
2. Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
3. Studiare qualitativamente il grafico del potenziale efficace.
4. Analizzare qualitativamente il moto nel piano $(\rho, \dot{\rho})$
5. Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$
6. Si discutano le condizioni sotto le quali in generale il moto complessivo del sistema è periodico

Soluzione

1. Poichè $m = 1$ il potenziale efficace è dato da

$$V_{eff}(\rho) = \log \rho - \frac{\alpha}{4\rho^2} + \frac{L^2}{2\rho^2} = \log \rho + \frac{\beta}{2\rho^2}, \quad \beta = L^2 - \frac{\alpha}{2}$$

e quindi l'equazione di Newton è

$$\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}}{d\rho} = -\frac{1}{\rho} + \frac{\beta}{\rho^3}$$

Il sistema dinamico associato è quindi
$$\begin{cases} \dot{\rho} = y \\ \dot{y} = -\frac{dV_{eff}}{d\rho} = -\frac{1}{\rho} + \frac{\beta}{\rho^3} \end{cases}$$

2. Sappiamo che i punti in cui si annulla il campo vettoriale sono tutti e soli i punti della forma $(\rho_0, 0)$ con ρ_0 punto critico del potenziale efficace; pertanto risolvendo l'equazione $V'_{eff}(\rho) = 0$ vediamo che questa ha soluzione se e solo se $\beta > 0$. In particolare avremo quindi:

- Per $\beta > 0$ un solo punto di equilibrio $P_0 = (\sqrt{\beta}, 0)$
- Per $\beta \leq 0$ nessun punto di equilibrio

Derivando ulteriormente il potenziale efficace otteniamo

$$\frac{d^2 V_{eff}}{d\rho^2} = -\frac{1}{\rho^2} + \frac{3\beta}{\rho^4}$$

quindi se $\beta > 0$ avremo che $\frac{d^2 V_{eff}}{d\rho^2}(\rho_0) = \frac{2}{\beta} > 0$, cioè P_0 è un punto di equilibrio instabile.

3. Indipendentemente dal valore di L si ha

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{eff}(\rho) = +\infty$$

E inoltre si ha

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{eff}(\rho) = \pm\infty$$

dove il segno dipende dal segno di L

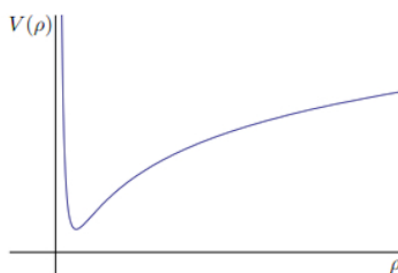


Figura 7: Grafico qualitativo del potenziale efficace per $\beta > 0$

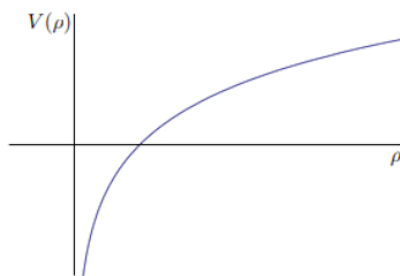


Figura 8: Grafico qualitativo del potenziale efficace per $\beta \leq 0$

4. Da $E = y^2/2 + V_{eff}(\rho)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2(E - V_{eff}(\rho))}$. Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse ρ . Suddividiamo il problema in due casi.

Caso 1 Se $\beta \leq 0$ per ogni valore di energia avremo una traiettoria aperta con $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} y(\rho) = \pm\infty$

Caso 2 Se $\beta > 0$:

- Per $E = V_{eff}(\rho_0)$ avremo il punto di equilibrio stabile P_0
- Per $E > V_{eff}(\rho_0)$ avremo traiettorie chiuse attorno al punto di equilibrio P_0

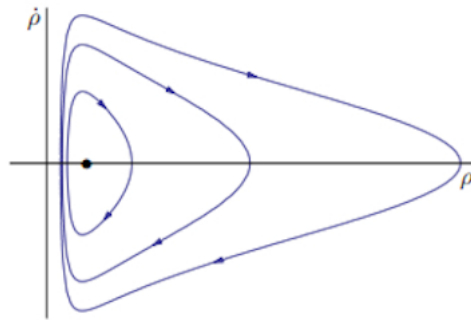


Figura 9: Piano delle fasi per $\beta > 0$

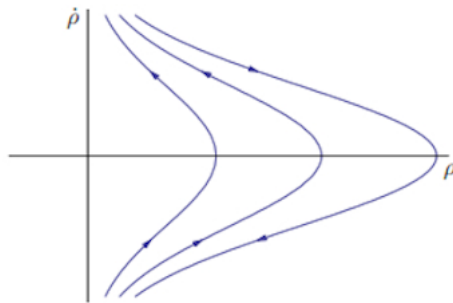


Figura 10: Piano delle fasi per $\beta \leq 0$

5. Alla luce di quanto visto al punto precedente si hanno traiettorie periodiche solo nel caso $\beta > 0$ e $E > V_{eff}(\rho_0)$.
6. Un caso in cui il moto complessivo è sicuramente periodico è quello in cui la variabile radiale si muove di moto banale, cioè, $\rho(t) \equiv \text{cost.}$, che è un caso che si verifica per $\beta > 0$ e dato iniziale corrispondente al punto di equilibrio P_0 . In questo caso $\rho(t) \equiv \sqrt{\beta}$ mentre θ si muove di moto rettilineo uniforme:

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{L}{m\rho_{eq}^2}t = \theta_0 + \frac{L}{\beta}t$$

che corrisponde a un moto complessivo circolare uniforme di periodo

$$T = \frac{2\pi m\rho_{eq}^2}{L} = \frac{2\pi\beta}{L}$$

Se invece il moto radiale è periodico non banale di periodo T_0 , la condizione necessaria affinché il moto complessivo sia periodico è che l'incremento della variabile angolare in un periodo T_0 , $\Delta\theta = \omega_1 T_0$ con

$$\omega_1 = \frac{2}{T_0} = 2 \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{L}{m\rho^2} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))}} = 2 \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{L}{\rho^2} \frac{d\rho}{\sqrt{2(E - \log \rho - \frac{\beta}{2\rho^2})}}$$

sia multiplo razionale di 2π (dove ρ_{\pm} sono le soluzioni di $E = V_{eff}(\rho)$)

In caso contrario il moto complessivo è quasi-periodico e riempie densamente una regione bidimensionale dello spazio (sia dello spazio fisico che dello spazio delle fasi).

Esercizio 4 In classe avete visto che se $L \neq 0$, l'orbita su cui si svolge il moto in un campo centrale è data dall'equazione

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \pm \frac{\mu\rho^2}{L} \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{eff})},$$

che prende il nome di prima forma dell'equazione delle orbite. Ora, verificate che, posto $u = 1/\rho$, tale equazione si può riscrivere come

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{\mu}{L^2} \frac{d}{du} \left[V\left(\frac{1}{u}\right) \right]$$

che prende il nome di seconda forma dell'equazione delle orbite.

Soluzione Poniamo $u = 1/\rho$ e ricordiamo $\dot{\theta} = L(\mu\rho^2)^{-1} = Lu^2/\mu$.

Poiché le funzioni $\theta = \theta(t)$ e $u = u(\rho)$ sono invertibili, abbiamo

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \left[u^2 \left(\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \right) \right] = -\frac{d}{d\theta} \left[u^2 \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right) \right] = -\frac{\mu}{L} \frac{d}{d\theta} \left[\dot{\theta} \frac{d\rho}{d\theta} \right] =$$

$$-\frac{\mu}{L} \frac{d}{d\theta} \left[\frac{d\theta}{dt} \frac{d\rho}{d\theta} \right] = -\frac{\mu}{L} \frac{d}{d\theta} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{\mu}{L} \frac{dt}{d\theta} \frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{\mu}{L\dot{\theta}} \frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{\mu^2}{L^2u^2} \frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{\mu^2}{L^2u^2} \ddot{\rho}.$$

Allora, utilizzando l'identità

$$\frac{dV_{eff}}{d\rho} = \frac{dV_{eff}}{du} \frac{du}{d\rho} = -u^2 \frac{dV_{eff}}{du},$$

possiamo scrivere l'equazione radiale $\mu\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}}{d\rho}(\rho)$ nella forma

$$\frac{L^2u^2}{\mu} \frac{d^2u}{d\theta^2} = \mu\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}}{d\rho}(\rho) = u^2 \frac{dV_{eff}}{du}$$

che implica

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{\mu}{L^2} \frac{d}{du} \left[V \left(\frac{1}{u} \right) \right]$$