FM210 - Tutorato 6
Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Guido Gentile
Tutore: Shulamit Terracina

13 Aprile 2020

Esercizio 1 Dato un sistema di riferimento $k = Oxyz$ (sistema di riferimento fisso) si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ la cui origine O' si muove lungo il profilo di un'equazione

$$y = x^2(x+1)(x+2)$$

La componente lungo l'asse x del vettore che individua il punto O' varia secondo la legge oraria $x_{O'}(t) = t$. L'asse ζ di K si mantiene parallelo all'asse z di k mentre l'asse ξ di K si mantiene sempre tangente alla curva $y = y(x)$. Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove nel sistema K lungo una circonferenza di centro O' e raggio $R = 1$ secondo la legge $\xi(t) = \cos 2t$.

1. Scrivere la trasformazione rigida $D : K \to k$ come composizione di una traslazione con una rotazione $D = C \circ B$ e determinare la forma di C e B.
2. Scrivere la legge del moto (leggi orarie) nei sisitemi k e K.
3. Determinare la velocità assoluta v e la velocità relativa v'.
4. Scrivere la componente traslatoria della velocità di trascinamento v_0
5. Scrivere la componente rotatoria della velocità di trascinamento v_T
6. Determinare la forza centrifuga che agisce sul punto P
7. Determinare la forza di Coriolis che agisce sul punto P

Esercizio 2 Si consideri l'equazione $\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}} - \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q})$ in $\mathbb{R}^3$. Si mostri che l'equazione si può riscrivere nella forma $\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} - 2A\dot{\mathbf{Q}} - A^2\mathbf{Q}$, dove A è la matrice antisimmetrica con $A_{12} = -\Omega_3, A_{13} = \Omega_2, A_{23} = -\Omega_1$.

Esercizio 3 Nel sistema di riferimento K considerato nell'esempio del pendolo di Foucault si consideri l'equazione

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} - 2\mathbf{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{Q})$$

con $\mathbf{\Omega} = (-\Omega \cos\lambda, 0, \Omega \sin\lambda)$, dove λ è notazione semplificata per λ_{eff}. Si mostri che la soluzione si può scrivere nella forma $\mathbf{Q}(t) = U(t)\mathbf{x}(t)$, dove $U(t) = e^{-At}$, con $A = \Omega\Lambda$ e

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\lambda & 0 \\ \sin\lambda & 0 & \cos\lambda \\ 0 & -\cos\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

e $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ risolve l'equazione $\ddot{\mathbf{x}} = U^{-1}\mathbf{F}$. *Hint:* Usare Esercizio 2.

Esercizio 4 Si considerino le equazioni

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = -\omega^2\xi + 2\Omega\dot{\eta}\sin\lambda + \Omega^2(\zeta\sin\lambda\cos\lambda + \xi\sin^2\lambda) \\ \ddot{\eta} = -\omega^2\eta - 2(\Omega\dot{\zeta}\cos\lambda + \Omega\dot{\xi}\sin\lambda) + \Omega^2\eta \\ \ddot{\zeta} = -\omega^2\zeta + 2\Omega\dot{\eta}\cos\lambda + \Omega^2(\xi\sin\lambda\cos\lambda + \zeta\cos^2\lambda) \end{cases}$$

che descrivono il pendolo di Foucault nell'approssimazione $2\lambda' = -m\omega^2$. In forma vettoriale, esse diventano

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \omega^2\mathbf{Q} - 2\mathbf{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{Q})$$

Se ne trovi la soluzione senza compiere alcuna ulteriore approssimazione.

Esercizio 5 Si consideri un punto materiale di massa μ soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \log(1+\rho^2) - \log\rho$$

1. Scrivere le equazioni di Newton e il sistema dinamico associato.
2. Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
3. Studiare qualitativamente il grafico del potenziale efficace.
4. Analizzare qualitativamente il moto nel piano $(\rho, \dot{\rho})$
5. Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$

Esercizio 6 Si consideri un punto materiale P di massa $m = 1$ soggetto a una forza centrale. Sia $x(t) = (x(t), y(t))$ il vettore che individua P nel piano del moto e sia

$$V(\rho) = \alpha^2 e^{-\alpha\rho}, \quad \alpha > 0$$

il potenziale corrispondente alla forza centrale, dove ρ denota il modulo del vettore $x(t)$.

1. Si studi il moto in corrispondenza dei dati iniziali $\mathbf{x}(0) = (1,0)$ e $\dot{\mathbf{x}}(0) = (-1,0)$.
2. Si studi il moto in corrispondenza dei dati iniziali $\mathbf{x}(0) = (1,0)$ e $\dot{\mathbf{x}}(0) = (0,1)$.
3. Relativamente ai punti precedenti, cosa succede al potenziale nel limite $\alpha \to \infty$?

Esercizio 7 Si consideri l'oscillatore armonico, ovvero il sistema unidimensionale con energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2, \quad x \in \mathbb{R},\, k > 0$$

1. Verificare che il sistema ammette esclusivamente moti periodici per ogni scelta dei dati iniziali $x(0), \dot{x}(0)$.
2. Calcolare il periodo corrispondente.

Esercizio 8 Si consideri il sistema unidimensionale con energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}kx^4, \quad x \in \mathbb{R},\, k > 0$$

1. Verificare che il sistema ammette esclusivamente moti periodici per ogni scelta dei dati iniziali $x(0), \dot{x}(0)$.
2. Scrivere il periodo come integrale definito.
3. Se E denota l'energia totale del sistema, cosa succede al periodo nei limiti per $E \to 0$ e $E \to +\infty$.