FM210 - Soluzioni Tutorato 6
Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Guido Gentile
Tutore: Shulamit Terracina

13 Aprile 2020

Esercizio 1 Dato un sistema di riferimento $k = Oxyz$ (sistema di riferimento fisso) si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ la cui origine O' si muove lungo il profilo di un'equazione

$$y = x^2(x+1)(x+2)$$

La componente lungo l'asse x del vettore che individua il punto O' varia secondo la legge oraria $x_{O'}(t) = t$. L'asse ζ di K si mantiene parallelo all'asse z di k mentre l'asse ξ di K si mantiene sempre tangente alla curva $y = y(x)$. Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove nel sistema K lungo una circonferenza di centro O' e raggio $R = 1$ secondo la legge $\xi(t) = \cos 2t$.

1. Scrivere la trasformazione rigida $D : K \to k$ come composizione di una traslazione con una rotazione $D = C \circ B$ e determinare la forma di C e B.
2. Scrivere la legge del moto nei sisitemi k e K.
3. Determinare la velocità assoluta v e la velocità relativa v'.
4. Scrivere la componente traslatoria della velocità di trascinamento v_0
5. Scrivere la componente rotatoria della velocità di trascinamento v_T
6. Determinare la forza centrifuga che agisce sul punto P
7. Determinare la forza di Coriolis che agisce sul punto P

Soluzione

1. Il vettore che individua O' nel sistema k è dato da

$$\mathbf{r}(t) = (t, t^2(t+1)(t+2), 0)$$

mentre la rotazione può essere rappresentata da una matrice della forma

$$B = B^{(3)} = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove $\theta(t)$ è tale che $\tan\theta(t) = \dot{y}_{O'}$. Poiché $y_{O'}(t) = t^2(t+1)(t+2)$ avremo che $\dot{y}_{O'} = 4t^3 + 9t^2 + 4t$ e perciò $\theta(t) = \arctan(4t^3 + 9t^2 + 4t)$.

Quindi la trasformazione rigida è data da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t^2(t+1)(t+2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Poiché P si muove in K lungo una circonferenza, la legge del moto in K sarà semplicemente $\mathbf{Q}(t) = (\xi(t), \eta(t), \zeta(t)) = (\cos 2t, \sin 2t, 0)$.

   Per ottenere la legge del moto in k basterà applicare la trasformazione D a $\mathbf{Q}$, ottenendo quindi

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t^2(t+1)(t+2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + \cos(\theta(t) + 2t) \\ t^2(t+1)(t+2) + \sin(\theta(t) + 2t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Sappiamo che la velocità assoluta è $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}$, e quindi basta semplicemente derivare il vettore che individua P nel sistema k ottenendo

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 - (2 + \dot{\theta}(t))\sin(\theta(t) + 2t) \\ \tan(\theta(t)) + (2 + \dot{\theta}(t))\cos(\theta(t) + 2t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

   dove

$$\dot{\theta}(t) = \frac{12t^2 + 18t + 4}{1 + (4t^3 + 9t^2 + 4t)^2}$$

   Derivando poi il vettore che individua P nel sistema K, otteniamo

$$\dot{\mathbf{Q}} = (-2\sin 2t, 2\cos 2t, 0)$$

   perciò la velocità relativa è data da

$$\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} -2\sin(\theta(t) + 2t) \\ 2\cos(\theta(t) + 2t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Da $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}$ troviamo $\mathbf{v}_0 = (1, 4t^3 + 9t^2 + 4t, 0) = (1, \tan\theta(t), 0)$

5. Sappiamo che $\mathbf{v}_T = \omega \wedge (\mathbf{q} - \mathbf{r})$, con $|\omega| = \dot{\theta}$. D'altra parte, poiché l'asse di rotazione del sistema è parallelo all'asse z di k, avremo $\omega(t) = (0, 0, \dot{\theta}(t))$. Da ciò otteniamo quindi

$$\mathbf{v}_T = (-\dot{\theta}(t)\sin(\theta(t) + 2t), \dot{\theta}(t)\cos(\theta(t) + 2t), 0)$$

6. Sappiamo che la forza centrifuga $F_{cf} = -\mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{Q})$ dove $\mathbf{\Omega} = B\omega$ e quindi, nel nostro caso $\mathbf{\Omega} = \omega$. Perciò otteniamo

$$F_{cf} = (\dot{\theta}^2(t) \cos 2t, \dot{\theta}^2(t) \sin 2t, 0) = \dot{\theta}^2(t)\mathbf{Q}(t)$$

7. Sapendo che la forza di Coriolis è $F_{cor} = -2(\mathbf{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}})$, troviamo che

$$F_{cor} = (4\dot{\theta}(t) \cos 2t, 4\dot{\theta}(t) \sin 2t, 0) = 4\dot{\theta}(t)\mathbf{Q}(t)$$

Esercizio 2 Si consideri l'equazione $\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} - 2\mathbf{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{Q})$ in $\mathbb{R}^3$. Si mostri che l'equazione si può riscrivere nella forma $\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} - 2A\dot{\mathbf{Q}} - A^2\mathbf{Q}$, dove A è la matrice antisimmetrica con $A_{12} = -\Omega_3, A_{13} = \Omega_2, A_{23} = -\Omega_1$.

Soluzione Dal lemma 34.9 [G] sappiamo che $A\mathbf{q} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{q}$ e dall'osservazione 33.10 [G] sappiamo che $\mathbf{a} = (-A_{23}, A_{13}, A_{12}) = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = \mathbf{\Omega}$.

Quindi riscrivo $\mathbf{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}} = A\dot{\mathbf{Q}}$ usando come $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{Q}}$ e riscrivo $\mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{Q}) = A(\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{Q}) = A^2\mathbf{Q}$ usando prima $\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{Q}$ come vettore $\mathbf{q}$ e poi $\mathbf{Q}$.

Esercizio 3 Nel sistema di riferimento K considerato nell'esempio del pendolo di Foucault si consideri l'equazione

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} - 2\mathbf{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{Q})$$

con $\mathbf{\Omega} = (-\Omega \cos \lambda, 0, \Omega \sin \lambda)$, dove λ è notazione semplificata per λ_{eff}. Si mostri che la soluzione si può scrivere nella forma $\mathbf{Q}(t) = U(t)\mathbf{x}(t)$, dove $U(t) = e^{-At}$, con $A = \Omega\Lambda$ e

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & 0 & \cos \lambda \\ 0 & -\cos \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

e $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ risolve l'equazione $\ddot{\mathbf{x}} = U^{-1}\mathbf{F}$. *Hint:* Usare Esercizio 2.

Soluzione Dall'esercizio 3 sappiamo che $\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} - 2A\dot{\mathbf{Q}} - A^2\mathbf{Q}$.

Cerchiamo una soluzione della forma $\mathbf{Q} = U\mathbf{x}$ dove $U = U(t)$ è una matrice da fissare. Si ha $\dot{\mathbf{Q}} = \dot{U}\mathbf{x} + U\dot{\mathbf{x}}$ e $\ddot{\mathbf{Q}} = \ddot{U}\mathbf{x} + 2\dot{U}\dot{\mathbf{x}} + U\ddot{\mathbf{x}}$, così che l'equazione diventa

$$\ddot{U}\mathbf{x} + 2\dot{U}\dot{\mathbf{x}} + U\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F} + 2A\dot{U}\mathbf{x} + 2AU\dot{\mathbf{x}} + A^2U\mathbf{x} = 0$$

Imponiamo che i termini con $\dot{\mathbf{x}}$ scompaiano dall'equazione, cioè che $2\dot{U}\dot{\mathbf{x}} + 2AU\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ Questo implica

$$\dot{U} + AU = 0 \Rightarrow U = e^{-At}U(0)$$

dove $U(0)$ è una matrice arbitraria che per semplicità porremo fissare $U(0) = \mathbb{I}$. Usando il fatto che $\dot{U} = -AU$, e quindi $\ddot{U} = A^2U$, l'equazione per $\mathbf{x}$ si semplifica notevolmente e si riduce a $U\ddot{x} - \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Osservando che U è invertibile, poiché $(e^{-At})^{-1} = e^{At}$ segue l'asserto.

Esercizio 4 Si considerino le equazioni

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = -\omega^2\xi + 2\Omega\dot{\eta}\sin\lambda + \Omega^2(\zeta\sin\lambda\cos\lambda + \xi\sin^2\lambda) \\ \ddot{\eta} = -\omega^2\eta - 2(\Omega\dot{\zeta}\cos\lambda + \Omega\dot{\xi}\sin\lambda) + \Omega^2\eta \\ \ddot{\zeta} = -\omega^2\zeta + 2\Omega\dot{\eta}\cos\lambda + \Omega^2(\xi\sin\lambda\cos\lambda + \zeta\cos^2\lambda) \end{cases}$$

che descrivono il pendolo di Foucault nell'approssimazione $2\lambda' = -m\omega^2$. In forma vettoriale, esse diventano

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \omega^2\mathbf{Q} - 2\mathbf{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{Q})$$

Se ne trovi la soluzione senza compiere alcuna ulteriore approssimazione.

Soluzione Nel sistema di riferimento K del pendolo di Foucault si ha $\mathbf{\Omega} = (-\Omega\cos\lambda, 0, \Omega\sin\lambda)$ dove λ è notazione semplificata per λ_{eff}. Per l'esercizio 3 la soluzione è data da $\mathbf{Q}(t) = U(t)\mathbf{x}(t)$, dove $U(t) = e^{-At}$, con $A = \Omega\Lambda$ e $\ddot{\mathbf{x}} = -\omega^2\mathbf{x}$. Si ha quindi $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, dove

$$x_k(t) = x_k(0)\cos\omega t + \frac{\dot{x}_k(0)}{\omega}\sin\omega t, \qquad k = 1, 2, 3$$

con i dati iniziali $\mathbf{x}(0)$ e $\dot{\mathbf{x}}(0)$ che si possono esprimere in termini dei dati iniziali $\mathbf{Q}(0)$ e $\dot{\mathbf{Q}}(0)$; Infatti poiché $U(0) = \mathbb{I}$ e $\dot{U}(0) = -A$, si ha $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{x}(0)$ e $\dot{\mathbf{Q}}(0) = \dot{\mathbf{x}}(0) - A\mathbf{x}(0)$, e quindi $\mathbf{x}(0) = \mathbf{Q}(0)$ e $\dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{Q}}(0) + A\mathbf{Q}(0)$. In componenti ciò equivale a :

$$\begin{cases} x_1(0) = \xi(0) \\ x_2(0) = \eta(0) \\ x_3(0) = \zeta(0) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x_1}(0) = \dot{\xi}(0) - \Omega\eta(0)\sin\lambda \\ \dot{x_2}(0) = \dot{\eta}(0) + \Omega(\xi(0)\sin\lambda + \zeta(0)\cos\lambda) \\ \dot{x_3}(0) = \dot{\zeta}(0) - \Omega\eta(0)\cos\lambda \end{cases}$$

Calcolando l'esponenziale di matrice e^{-At} si ottiene quindi

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \\ \zeta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \sin^2\lambda(\cos\Omega t - 1) & \sin\lambda\sin\Omega t & \sin\lambda\cos\lambda(\cos\Omega t - 1) \\ -\sin\lambda\sin\Omega t & \cos\Omega t & -\cos\lambda\sin\Omega t \\ \sin\lambda\cos\lambda(\cos\Omega t - 1) & \cos\lambda\sin\Omega t & 1 + \cos^2\lambda(\cos\Omega t - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

Usando le espressioni esplicite di $\mathbf{x}(t)$ in termini dei dati iniziali $\mathbf{Q}(0)$ e $\dot{\mathbf{Q}}(0)$ si ottiene infine l'espressione completa di $\mathbf{Q}(t)$.

Esercizio 5 Si consideri un punto materiale di massa μ soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \log(1+\rho^2) - \log\rho$$

1. Scrivere le equazioni di Newton e il sistema dinamico associato.
2. Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
3. Studiare qualitativamente il grafico del potenziale efficace.
4. Analizzare qualitativamente il moto nel piano $(\rho, \dot\rho)$
5. Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot\rho)$

Soluzione

1. Il potenziale efficace è dato da

$$V_{eff}(\rho) = \log(1+\rho^2) - \log\rho + \frac{L^2}{2\mu\rho^2}, \quad L \neq 0$$

e quindi l'equazione di Newton è

$$\ddot\rho = -\frac{dV_{eff}}{d\rho} = -\frac{2\rho}{1+\rho^2} + \frac{1}{\rho} + \frac{L^2}{\mu\rho^3}$$

Il sistema dinamico associato è quindi $\begin{cases} \dot\rho = y \\ \dot y = -\dfrac{dV_{eff}}{d\rho} = -\frac{2\rho}{1+\rho^2} + \frac{1}{\rho} + \frac{L^2}{\mu\rho^3} \end{cases}$

2. Sappiamo che i punti in cui si annulla il campo vettoriale sono tutti e soli i punti della forma $(\rho_{eq}, 0)$ con ρ_{eq} punto critico del potenziale efficace; pertanto risolvendo l'equazione $V'_{eff}(\rho) = 0$ vediamo che l'unico punto stazionario del potenziale efficace è

$$\rho_{eq} = \sqrt{\frac{1+\alpha+\sqrt{\alpha^2+6\alpha+1}}{2}}, \quad \alpha = \frac{L^2}{\mu}$$

e poiché questo è un punto di minimo per il potenziale efficace, allora il punto $(\rho_{eq}, 0)$ è un punto di equilibrio stabile.

Tutte le curve per $E > Veff(\rho_{eq})$ sono curve chiuse periodiche e per $E = Veff(\rho_{eq})$ e $\rho_0 = \rho_{eq}$ abbiamo un moto fisso.

Esercizio 6 Si consideri un punto materiale P di massa $m = 1$ soggetto a una forza centrale. Sia $x(t) = (x(t), y(t))$ il vettore che individua P nel piano del moto e sia

$$V(\rho) = \alpha^2 e^{-\alpha\rho}, \quad \alpha > 0$$

il potenziale corrispondente alla forza centrale, dove ρ denota il modulo del vettore $x(t)$.

1. Si studi il moto in corrispondenza dei dati iniziali $\mathbf{x}(0) = (1, 0)$ e $\dot{\mathbf{x}}(0) = (-1, 0)$.

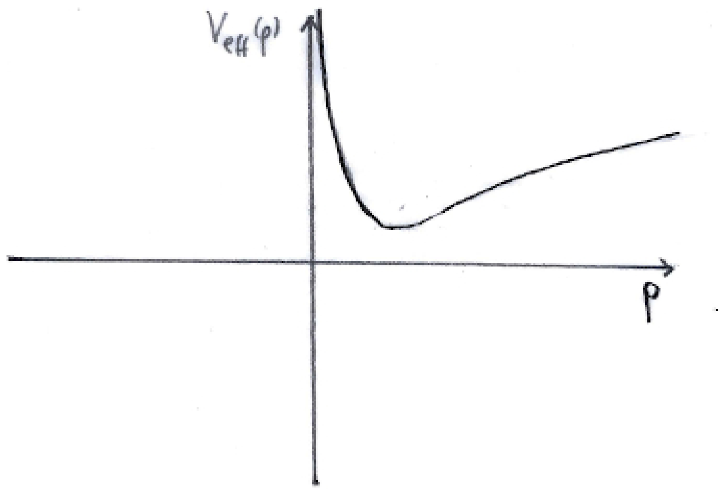


Figura 1: Grafico del potenziale

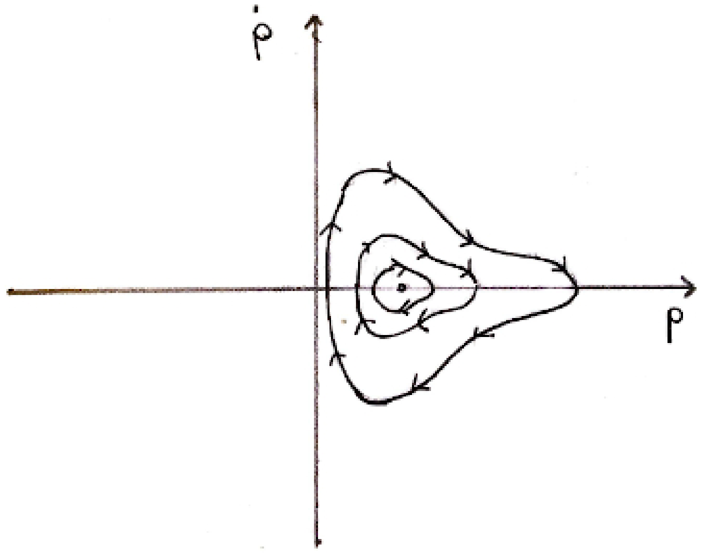
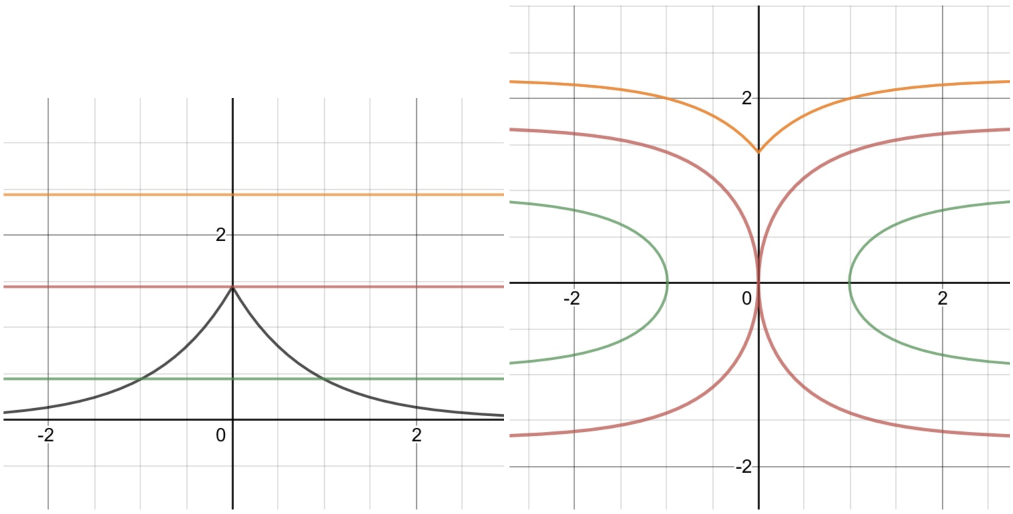


Figura 2: Spazio delle fasi

2. Si studi il moto in corrispondenza dei dati iniziali $\mathbf{x}(0) = (1, 0)$ e $\dot{\mathbf{x}}(0) = (0, 1)$.
3. Relativamente ai punti precedenti, cosa succede al potenziale nel limite $\alpha \to \infty$?

Soluzione

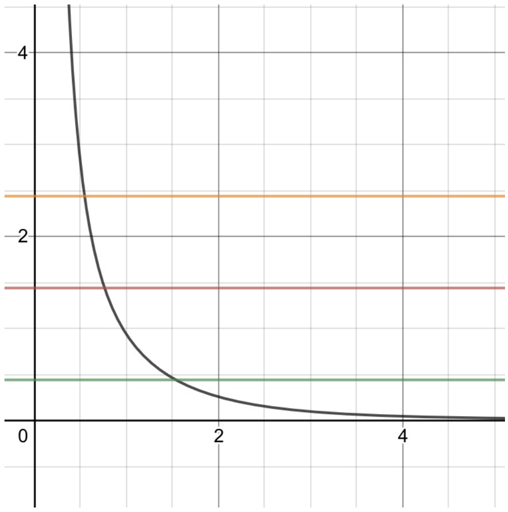
1. $\mathbf{x}(0) = (1,0)$ e $\dot{\mathbf{x}}(0) = (-1,0)$ quindi $L = |\mathbf{x}(0) \wedge \dot{\mathbf{x}}(0)| = 0$ e pertanto il moto si svolge lungo una retta, in particolare lungo l'asse delle x (da destra verso sinistra).
   Possiamo quindi analizzare il moto come un moto unidimensionale (sulla retta con potenziale $V(x) = \alpha^2 e^{-\alpha|x|}$
   Studio il potenziale: in $x = 0$ questo potenziale è continuo ma non derivabile, $\lim_{|x|\to+\infty} V(x) = 0$, $V(0) = \alpha^2$ e $V'(x) = -\alpha^3 e^{-\alpha|x|}$ non si annulla mai ed è crescente per le x positive e decrescente per le x negative.
   Analizziamo il moto al variare dell'energia:
   Se $E < \alpha^2$ esisterà tempo t^* tale che $\lim_{t\to t^*} x(t) = 0$ tuttavia in $x = 0$, come abbiamo detto, V non è derivabile quindi la forza $-V'(x)$ non è definita e quindi avrà senso parlare di soluzione solamente per i tempi $t < t^*$. Comunque, per tale valore dell'energia le traiettorie sono definite globalmente perché V è limitato dal basso e sono traiettorie aperte che vanno ad infinito con velocità asintotica a $\sqrt{2E}$.
   Se $E = \alpha^2$ si ha un moto che tende a $x = 0^+$ con velocità $\dot{x} = 0^-$ in un tempo finito, non essendoci altri punti critici.
   Se $E > \alpha^2$ si ha un moto che tende a $x = 0^+$ con velocità $\dot{x} = E - \alpha^2$, sempre in un tempo finito.

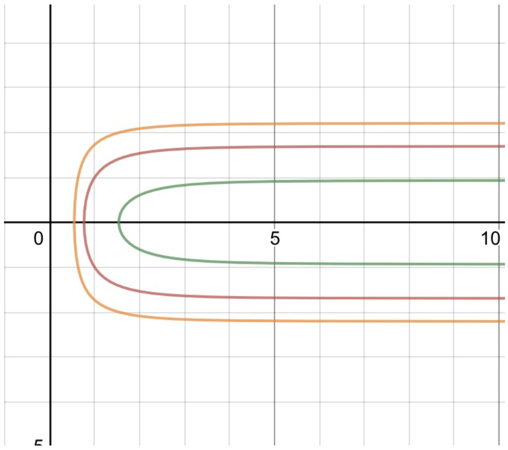


2. $\mathbf{x}(0) = (1,0)$ e $\dot{\mathbf{x}}(0) = (0,1)$ quindi $L = 1$.

$$E = \frac{1}{2}\dot{\rho}^2 + V_{eff}(\rho) \qquad V_{eff}(\rho) = V(\rho) + \frac{L}{2m\rho^2} = \alpha^2 e^{-\alpha\rho} + \frac{1}{2\rho^2}$$

   $V_{eff}(\rho)$ tende a $+\infty$ per ρ che tende a 0^+ e tende a 0^+ per ρ che tende a $+\infty$ ed inoltre, essendo $V'_{eff}(\rho) = -\alpha^3 e^{-\alpha\rho} - \frac{1}{\rho^3} < 0$ per ogni $\rho \in (0, +\infty)$, è sempre decrescente. Pertanto globalmente non ci sono moti periodici e ci sono curve aperte per ogni livello dell'energia.





3. Vediamo quindi il potenziale come funzione di α e facciamo i limiti.
   Nel primo caso
$$\lim_{\alpha\to+\infty} V(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{se } \rho \neq 0 \\ +\infty & \text{se } \rho = 0 \end{cases} \qquad =: \bar{V}(\rho)$$
   Nel secondo caso
$$\lim_{\alpha\to+\infty} V_{eff}(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{2\rho^2} & \text{se } \rho \neq 0 \\ \text{Non definito se } \rho = 0 \end{cases} \qquad =: \bar{V}_{eff}(\rho)$$

Esercizio 7 Si consideri l'oscillatore armonico, ovvero il sistema unidimensionale con energia potenziale
$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2, \quad x \in \mathbb{R},\, k > 0$$

1. Verificare che il sistema ammette esclusivamente moti periodici per ogni scelta dei dati iniziali $x(0), \dot{x}(0)$.
2. Calcolare il periodo corrispondente.

Soluzione

1.
$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \Longrightarrow \frac{\dot{x}^2}{\left(\sqrt{\frac{2E}{m}}\right)^2} + \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{2E}{k}}\right)^2} = 1$$
   Quest'ultima è evidentemente l'equazione di un'ellisse nel piano $(x, \dot{x})$, pertanto le curve di livello sono chiuse e periodiche per ogni scelta di dato iniziale.
2. Scrivo il sistema dinamico associato e le equazioni del moto:
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{k}{m}x \end{cases} \qquad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

L'equazione di Newton può essere facilmente risolta in quanto ODE del secondo ordine lineare e omogenea:
Polinomio caratteristico: $\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$ quindi ha radici complesse. Definendo $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, la soluzione è $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$.
Il periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Esercizio 8 Si consideri il sistema unidimensionale con energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}kx^4, \quad x \in \mathbb{R},\ k > 0$$

1. Verificare che il sistema ammette esclusivamente moti periodici per ogni scelta dei dati iniziali $x(0), \dot{x}(0)$.
2. Scrivere il periodo come integrale definito.
3. Se E denota l'energia totale del sistema, cosa succede al periodo nei limiti per $E \to 0$ e $E \to +\infty$.

Soluzione

1. $$V'(x) = kx + kx^3 = kx(1 + x^2)$$
   $V'(0) = 0$, V è crescente in $(0, +\infty)$ e decrescente in $(-\infty, 0)$ pertanto $x = 0$ è un punto di minimo del potenziale e $(0, 0)$ è un punto di equilibrio stabile per il sistema dinamico
   $$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{V'(x)}{m} \end{cases}$$
   Non essendoci altri punti stazionari, vi sono solo moti chiusi periodici.
2. Scrivo il periodo come integrale indefinito:
   $$T = \sqrt{2m}\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - (\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}kx^4)}}$$
   dove x_1, x_2 sono le soluzioni dell'equazione $E = V(x)$ per E fissata.
3. Per $E \to 0$ le orbite si chiudono verso l'origine e per il teorema sulla stima dei periodi $T \to 2\pi\sqrt{\frac{m}{V''(0)}}$ e quindi il periodo tende a $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ come nell'oscillatore armonico.
   Per il teorema della media integrale $T = \sqrt{2m}f(E)(x_2 - x_1)$ con $f(E) = \frac{1}{\sqrt{E-(\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{4}kx^4)}}$ che per $E \to +\infty$ si comporta come $E^{-\frac{1}{2}}$.
   Stimiamo ora x_1 e x_2: abbiamo detto che sono le soluzioni dell'equazione $E = V(x)$ e quindi andando a risolvere esplicitamente
   $$x_{1,2} = \pm\sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{4E}{k}}}$$
   che ad infinito si comportano come $\pm\sqrt[4]{4E}$ e quindi la loro differenza come $2\sqrt{2}E^{\frac{1}{4}}$
   Quindi $T \sim 4\sqrt{m}E^{-\frac{1}{4}}$ e perciò $T \to 0$ se $E \to +\infty$.