FM210 - Tutorato 7
Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Guido Gentile
Tutore: Shulamit Terracina

17 Aprile 2020

Esercizio 1 Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

e se ne calcoli la soluzione con condizioni iniziali arbitrarie $x(0) = \bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$.

Esercizio 2 Si consideri il sistema meccanico unidimensionale costituito da un punto materiale di massa $m = 2$ sottosposto a una forza conservativa di energia potenziale

$$V(x) = 4x^2 - 6x - \log(x^2)$$

- Si scrivano le equazioni del sistema dinamico associato.
- Si determinino i punti d'equilibrio e se ne discuta la stabilità.
- Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema.

Esercizio 3 Considera il moto di un punto materiale di massa 1 nella "doppia buca di potenziale"

$$\ddot{x} = x - x^3.$$

- Discuti la stabilità delle posizioni di equilibrio e disegna le orbite nello spazio delle fasi al variare di E.
- Considera il dato iniziale $(x_0, \dot{x}_0) = (-1, v)$; per quali valori di $v \in \mathbb{R}$ il punto materiale raggiunge la posizione 1? Con che velocità ci arriva?
- Per $E = 0$ il moto avviene sulla separatrice. Con che angolo la separatrice interseca gli assi?

Esercizio 4 Dato un sistema di riferimento $k = Oxyz$ (sistema di riferimento fisso) si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ la cui origine O' si muove nel piano (x, y) lungo il profilo di un'equazione $y = x^2$ in modo tale che la sua componente lungo l'asse x del vettore che individua il punto O' varia secondo la legge oraria $x_{O'}(t) = \sin t$. L'asse ζ di K si mantiene parallelo all'asse z di k mentre l'asse ξ di K si mantiene sempre tangente alla curva $y = y(x)$. Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove nel sistema K lungo l'asse ξ con legge oraria $\xi(t) = t$.

1. Scrivere la trasformazione rigida $D : K \to k$ come composizione di una traslazione con una rotazione $D = C \circ B$ e determinare la forma di C e B.
2. Scrivere la soluzione delle equazioni del moto $\mathbf{q}(t)$ nel sistema k e $\mathbf{Q}(t)$ nel sistema K
3. Determinare la velocità assoluta v e la velocità relativa v'.
4. Scrivere la componente traslatoria della velocità di trascinamento v_0
5. Scrivere la componente rotatoria della velocità di trascinamento v_T
6. Determinare la forza centrifuga che agisce sul punto P
7. Determinare la forza di Coriolis che agisce sul punto P
8. Dimostrare che la traiettoria $t \to \mathbf{q}(t)$ attraversa l'asse x infinite volte, e calcolare esplicitamente i tempi di attraversamento. [*Suggerimento* Si ha $\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ per $|x| < \frac{\pi}{2}$]

Esercizio 5 Si consideri un punto materiale di massa μ soggetto a una forza centrale di energia potenziale:

$$V(\rho) = 2\log(\rho) - \frac{1}{2}\log(1 + 2\rho^2 + 2\rho^4)$$

Si assuma che il momento angolare L del sistema sia diverso da zero. Al variare di L si risponda alle seguenti domande

1. Scrivere le equazioni di Newton e il sistema dinamico associato.
2. Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
3. Studiare qualitativamente il grafico del potenziale efficace e analizzare qualitativamente il moto nel piano $(\rho, \dot{\rho})$
4. Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$
5. Si discuta come cambia lo scenario per $L = 0$.