

FM210 - Soluzioni Tutorato 8  
Università degli Studi Roma Tre  
Dipartimento di Matematica e Fisica  
Docente: Guido Gentile  
Tutore: Shulamit Terracina

4 Maggio 2021

**Esercizio 1** Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange per il sistema bidimensionale di Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = q_2 \dot{q}_1 - q_1 \dot{q}_2 - 2q_1 q_2$$

e trovarne esplicitamente la soluzione.

**Soluzione** Le equazioni di Eulero-Lagrange sono della forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} &= -\dot{q}_2 - 2q_2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = q_2 &\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} &= \dot{q}_1 - 2q_1 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = -q_1 &\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = -\dot{q}_1 \end{aligned}$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono quindi:

$$\begin{cases} \dot{q}_2 = -\dot{q}_2 - 2q_2 \\ -\dot{q}_1 = \dot{q}_1 - 2q_1 \end{cases}$$

Le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} q_2(t) = q_2(0)e^{-t} \\ q_1(t) = q_1(0)e^t \end{cases}$$

**Esercizio 2** Si calcolino le reazioni vincolari del pendolo semplice di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$ . In particolare si determinino in corrispondenza di quale configurazione assumono il valore massimo e il valore minimo.

**Soluzione** Poiché, come visto,  $(x, y) = (\ell \sin \theta, -\ell \cos \theta)$ , si ha

$$\begin{cases} \ddot{x} = \ell \ddot{\theta} \cos \theta - \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ \ddot{y} = \ell \ddot{\theta} \sin \theta + \ell \dot{\theta}^2 \cos \theta \end{cases}$$

dove  $\ell \ddot{\theta} = -g \sin \theta$  e  $\ell \dot{\theta}^2 + 2g(1 - \cos \theta) = gA$ , se  $A := \frac{2E}{mg\ell}$  (per la conservazione dell'energia  $E$ ). Ho ottenuto quest'ultima relazione calcolando

$$E = T + U = \frac{m}{2} |\dot{x}|^2 + mg(1 - \cos \theta)$$

Scrivendo quindi le componenti  $f_{V,x} = m\ddot{x}$  e  $f_{V,y} = m\ddot{y} + mg$  si trova

$$f_{V,x} = -mg(A + 3 \cos \theta - 2) \sin \theta, \quad f_{V,y} = mg(A + 3 \cos \theta - 2) \cos \theta$$

Il massimo della funzione  $|\mathbf{f}_v| = |f_{V,x}|^2 + |f_{V,y}|^2 = m^2 g^2 (A + 3 \cos \theta - 2)^2$  è quindi raggiunto quando  $\theta = 0$ , mentre il minimo si ha per  $\theta = \pi$

**Esercizio 3** Si consideri un pendolo costituito da una molla di lunghezza di riposo  $\ell$  sospesa a un punto di sospensione  $O$ , al cui estremo libero è appesa una massa  $m$  (vedi Fig.1). Si scriva la Lagrangiana del sistema usando le coordinate  $x$  e  $\theta$ , dove  $\ell + x$  è la lunghezza della molla e  $\theta$  l'angolo formato con la verticale verso il basso, come in figura. Si determinino le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti.

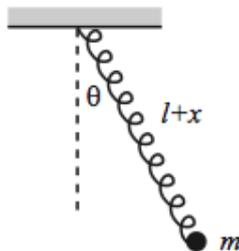
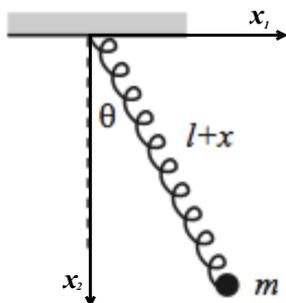


Figura 1:

**Soluzione** Consideriamo il seguente sistema di riferimento:



Ricordiamo che la Lagrangiana è definita come:  $\mathcal{L} = T - U$  dove  $T$  è l'energia cinetica e  $U$  è il potenziale. Cominciamo con riscriverci le coordinate  $x_{1,m}$  e  $x_{2,m}$  del punto di massa  $m$  in termini delle coordinate  $x$  e  $\theta$ :

$$\begin{cases} x_{1,m} = (\ell + x) \sin \theta \\ x_{2,m} = (\ell + x) \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{1,m} = \dot{x} \sin \theta + (\ell + x) \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{x}_{2,m} = \dot{x} \cos \theta - (\ell + x) \dot{\theta} \sin \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_{1,m}^2 + \dot{x}_{2,m}^2) = \frac{1}{2} m [(\dot{x} \sin \theta + (\ell + x) \dot{\theta} \cos \theta)^2 + (\dot{x} \cos \theta - (\ell + x) \dot{\theta} \sin \theta)^2] = \frac{1}{2} m [\dot{x}^2 + (\ell + x)^2 \dot{\theta}^2]$$

Notiamo che il corpo di massa  $m$  è soggetto sia alla forza peso che alla forza elastica:

$$\Rightarrow U = U_{el} + U_{grav} = \frac{1}{2} k x^2 - mg(\ell + x) \cos \theta$$

Pertanto la Lagrangiana sarà:

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} m [\dot{x}^2 + (\ell + x)^2 \dot{\theta}^2] - \frac{1}{2} k x^2 + mg(\ell + x) \cos \theta$$

Da cui:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = m(\ell + x) \dot{\theta}^2 - kx + mg \cos \theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mg(\ell + x) \sin \theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m(\ell + x)^2 \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = 2m(\ell + x) \dot{x} \dot{\theta} + m(\ell + x)^2 \ddot{\theta}$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono quindi:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = m(\ell + x) \dot{\theta}^2 - kx + mg \cos \theta \\ 2(\ell + x) \dot{x} \dot{\theta} + (\ell + x)^2 \ddot{\theta} = -g(\ell + x) \sin \theta \end{cases}$$

**Esercizio 4** Un sistema meccanico è costituito da tre punti  $P_1$ ,  $P_2$  e  $Q$ , di masse, rispettivamente  $m_1 = m_2 = m$  e  $m_3 = 2m$ , vincolati su un piano verticale  $\pi$ . I due punti  $P_1$  e  $P_2$  si muovono lungo un asse orizzontale (che si può identificare con l'asse  $x$ ) e sono entrambi collegati a  $Q$  tramite due sbarre rettilinee di lunghezza  $L$  e massa trascurabile. Il punto  $P_1$  è collegato a un punto fisso  $O$  dell'asse lungo cui scorre tramite una molla di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo nulla. Sia  $g$  l'accelerazione di gravità.

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange, utilizzando come coordinate lagrangiane l'ascissa  $x$  del punto  $Q$  lungo l'asse orizzontale e l'angolo  $\theta$  che la retta passante per i punti  $P_1$  e  $Q$  forma con tale asse.
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
3. Per  $k = 0$  si discuta qualitativamente il moto.

4. Sempre per  $k = 0$ , partendo dalla configurazione iniziale

$$x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0 \quad \theta(0) = 0 \quad \dot{\theta}(0) = 0,$$

si descriva qualitativamente il moto e si determini la forza vincolare nel punto  $Q$  in funzione del tempo, in particolare quando tale punto si trova a quota  $\frac{L}{\sqrt{2}}$  al di sotto dell'asse  $x$ .

5. Si discuta come si modifica la trattazione se entrambe le sbarre hanno massa  $M$  e sono omogenee.

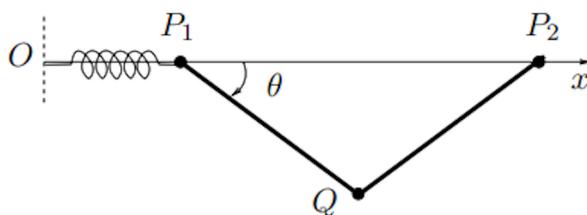


Figura 2:

### Soluzione

1. Per scrivere la lagrangiana calcoliamo energia cinetica e potenziale.

Iniziamo scrivendo le coordinate dei tre punti:

$$P_1 = (x - L \cos \theta; 0) \quad P_2 = (x + L \cos \theta; 0) \quad Q = (x, -L \sin \theta)$$

e le tre velocità:

$$\dot{P}_1 = (\dot{x} + L\dot{\theta} \sin \theta; 0) \quad \dot{P}_2 = (\dot{x} - L\dot{\theta} \sin \theta; 0) \quad \dot{Q} = (\dot{x}, -L\dot{\theta} \cos \theta)$$

Ora l'energia cinetica (vanno divisi divisi due casi, se in P2 ho + o se ho -. Io faccio + perché l'altro è molto simile):

$$T = \frac{m_1}{2} |\dot{P}_1|^2 + \frac{m_2}{2} |\dot{P}_2|^2 + \frac{m_3}{2} |\dot{Q}|^2 = m(2\dot{x}^2 + L^2\dot{\theta}^2)$$

La potenziale:

$$V = U_{P_Q} + U_{E_{P_1}} = m_3 g y_Q + \frac{k}{2} x_{P_1}^2 = -2mgL \sin \theta + \frac{k}{2} (x^2 + L^2 \cos^2 \theta - 2Lx \cos \theta)$$

Quindi  $\mathcal{L} = T - V$  con  $T$  e  $V$  appena calcolati e quindi le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{cases} 4m\ddot{x} = -kx + kL \cos \theta \\ 2mL^2\ddot{\theta} = 2mgL \cos \theta + \frac{k}{2} L^2 \sin 2\theta - kLx \sin \theta \end{cases}$$

2. Per calcolare i punti di equilibrio, vista l'equivalenza tra le equazioni di Newton e quelle di Eulero-Lagrange, ci basta risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} -kx + kL \cos \theta = 0 \\ 2mgL \cos \theta + \frac{k}{2}L^2 \sin 2\theta - kLx \sin \theta = 0 \end{cases}$$

ottenendo così che i punti di equilibrio sono  $(x, \theta) = (0, \frac{\pi}{2})$  e  $(x, \theta) = (0, -\frac{\pi}{2})$ .

Calcolando la matrice hessiana del potenziale e calcolandola nei punti di equilibrio

$$\begin{pmatrix} k & Lk \sin \theta \\ Lk \sin \theta & 2mgL \sin \theta + 2kLx \cos \theta - kL^2 \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

vediamo che  $(0, \frac{\pi}{2})$  è un punto di equilibrio stabile e che  $(0, -\frac{\pi}{2})$  è un punto di equilibrio instabile.

3. Per  $k = 0$  cioè in assenza della molla abbiamo che  $\ddot{x} = 0$  e che  $L\ddot{\theta} = g \cos \theta$ , quindi il centro di massa del sistema si muove di moto rettilineo uniforme, mentre l'equazione per la variabile  $\theta$  descrive un moto unidimensionale di un punto di massa  $m = 1$  ed energia potenziale  $V = \frac{g}{L} \sin \theta$ . Nel sistema del centro di massa, il sistema descrive un moto simile a quello di un pendolo semplice.
4. Sempre per  $k = 0$ , considerando che il moto parte con la configurazione iniziale

$$x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0 \quad \theta(0) = 0 \quad \dot{\theta}(0) = 0,$$

la forza vincolare che agisce sul punto  $Q$  è data da

$$R^{(Q)} = (2m\ddot{x} - f_x^{(Q)}, 2m\ddot{y} - f_y^{(Q)}),$$

dove  $\ddot{x} = 0, \ddot{y} = L\dot{\theta}^2 \sin \theta - L\ddot{\theta} \cos \theta, f_x^{(Q)} = 0$  e  $f_y^{(Q)} = -2mg$ , così che

$$R^{(Q)} = (0, 2m(L\dot{\theta}^2 \sin \theta - L\ddot{\theta} \cos \theta)) = (0, 2mg(\cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta + 1)),$$

dove si è usato che l'energia totale per il moto della variabile  $\theta$  è  $E(\theta, \dot{\theta}) = 0$  in corrispondenza dei dati iniziali scelti. In particolare, quando  $Q$  si trova alla quota  $\frac{L}{\sqrt{2}}$  sotto l'asse  $x$ , si ha  $\frac{\theta}{4}$  e quindi la forza vincolare  $R^{(Q)} = (0, 0)$ .

5. Se le due sbarre hanno massa  $M$ , l'energia cinetica delle sbarre può essere calcolata utilizzando il teorema di König. Innanzitutto cerchiamo i centri di massa delle due sbarrette e le loro velocità:

$$\begin{aligned} G_1 &= (x - \frac{L}{2} \cos \theta; -\frac{L}{2} \sin \theta) & G_2 &= (x \pm \frac{L}{2} \cos \theta; -\frac{L}{2} \sin \theta) \\ \dot{G}_1 &= (\dot{x} + \frac{L\dot{\theta}}{2} \sin \theta; -\frac{L\dot{\theta}}{2} \cos \theta) & \dot{G}_2 &= (\dot{x} \mp \frac{L\dot{\theta}}{2} \sin \theta; -\frac{L\dot{\theta}}{2} \cos \theta) \end{aligned}$$

Calcoliamo l'energia cinetica:

$$\frac{1}{2}M|\dot{G}_1|^2 + \frac{I_1\dot{\theta}^2}{2} + \frac{1}{2}M|\dot{G}_2|^2 + \frac{I_2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{1}{2}m|\dot{P}_1|^2 + \frac{1}{2}m|\dot{P}_2|^2 + \frac{1}{2}m|\dot{Q}|^2 = (M+2m)\dot{x}^2 + \left(\frac{M}{3} + m\right)L^2\dot{\theta}^2$$

dove ho usato che  $I_1 = I_2 = \frac{ML^2}{12}$

Ora il potenziale:

$$V = U_{P_Q} + U_{E_{P_1}} + U_{P_{G_1}} + U_{P_{G_2}} = -MgL \sin \theta - \frac{k}{2}(x - L \cos \theta)^2 - 2mgL \sin \theta$$

Da cui la lagrangiana  $\mathcal{L} = T - V = (M + 2m)\dot{x}^2 + \left(\frac{M}{3} + m\right)L^2\dot{\theta}^2 - (-MgL \sin \theta - \frac{k}{2}(x - L \cos \theta)^2 - 2mgL \sin \theta)$  che può essere discussa analogamente al caso  $M = 0$ .

Equazioni di Eulero Lagrange:

$$\begin{cases} 2(M + 2m)\ddot{x} = k(x - L \cos \theta) \\ 2\left(m + \frac{M}{3}\right)L^2\ddot{\theta} = (M + 2m)gL \cos \theta + Lk(x - L \cos \theta) \sin \theta \end{cases}$$

Da cui ricaviamo che i punti di equilibrio sono  $(x, \theta) = (0, \pm \frac{\pi}{2})$ , entrambi instabili.