

FM210 - Tutorato 9
Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Guido Gentile
Tutore: Shulamit Terracina

11 Maggio 2021

Esercizio 1 Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + q_1^2 + q_2^2 - (q_1^2 + q_2^2)^3.$$

1. Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange, e determinare l'energia (generalizzata) E , conservata dalle equazioni del moto.
2. Sfruttando la simmetria della Lagrangiana, dimostrare che esiste un integrale primo distinto da E . Detto I tale integrale primo, si consideri il sistema di Lagrange ristretto sui livelli $I = c$, con $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si dimostri che tale restrizione è ancora un sistema Lagrangiano, ad un grado di libertà, e si scriva la corrispondente Lagrangiana ridotta.
3. Si studi qualitativamente il moto del sistema unidimensionale associato a tale Lagrangiana ridotta.

Esercizio 2 Consideriamo un sistema meccanico formato da due punti A e B di massa m in cui A è collegato ad un punto fisso O tramite una sbarretta lunga L di massa M e B è collegato ad A tramite una molla di costante elastica $k > 0$ di lunghezza a riposo nulla.

Scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange. Trovare poi i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.

[*Suggerimento*: Conviene usare come coordinate lagrangiane l'angolo φ_1 che il punto A forma con la verticale discendente e le coordinate cartesiane (x, y) del punto B .]

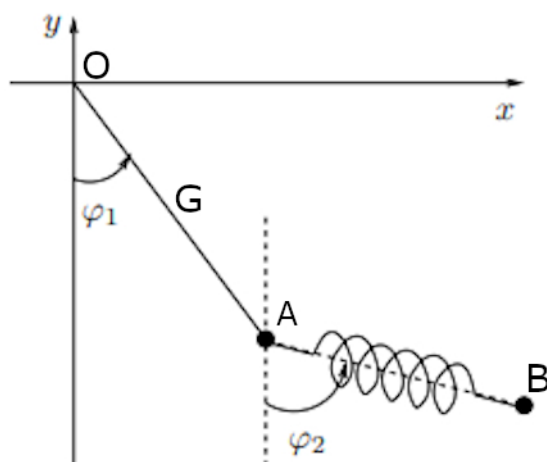
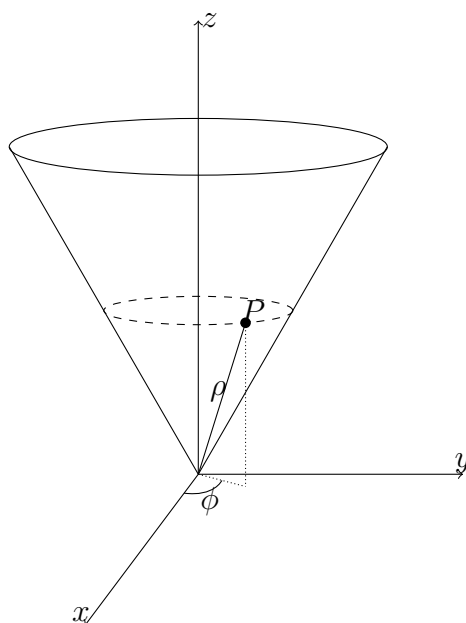


Figura 1:

Esercizio 3 Una massa puntiforme m è vincolata a muoversi sotto l'effetto della forza peso sulla superficie di un cono di semiampiezza al vertice $\theta \in (0, \pi/2)$, con asse in direzione verticale e vertice rivolto verso il basso, come in figura.



1. Si parametrizzi la superficie del vincolo usando coordinate sferiche centrate nel vertice del cono: in altre parole, si scelgano come coordinate

parametriche la distanza $\rho > 0$ dal vertice del cono, e l'angolo azimutale ϕ , come in figura.

2. Si scriva la Lagrangiana \mathcal{L} del sistema, usando come coordinate Lagrangiane le variabili $(\rho, \phi, \dot{\rho}, \dot{\phi})$. Si riconosca che ϕ è una variabile ciclica.
3. Si ricavino le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. Si riconosca che tale sistema di equazioni ammette due grandezze conservate: l'energia meccanica E e il momento coniugato alla variabile ciclica ϕ , che chiameremo A (Che da qui in poi supporremo non nulla).
4. Usando la conservazione di A , si elimini la dipendenza di $\dot{\phi}$ nell'espressione di E , e si esprima così l'energia meccanica del sistema in funzione di $\rho, \dot{\rho}$ e di A nella forma $E = m\dot{\rho}^2/2 + V_{eff}(\rho)$: qual è l'espressione del potenziale efficace $V_{eff}(\rho)$?
5. Si studi il grafico di V_{eff} e si discuta la natura qualitativa del moto radiale.
6. Si discutano le condizioni per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito.

[*Suggerimento*: θ è un angolo dato e quindi fisso, non dipendete dal tempo]

Esercizio 4 Si consideri un punto materiale di massa m vincolato a muoversi su una superficie ellissoidale di equazione

$$2(x^2 + y^2) + z^2 = R^2,$$

sottoposto all'azione della gravità e collegato agli estremi dell'ellissoide $(0, 0, \pm R)$ tramite due molle di costante elastica k .

1. Si parametrizzi l'ellissoide usando coordinate cilindriche, i.e., nella forma $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \rho(z) \cos \theta \\ \rho(z) \sin \theta \\ z \end{pmatrix}$ con $\rho(z) = \sqrt{\frac{R^2 - z^2}{2}}$, $z \in [-R, R]$ e $\theta \in [0, 2\pi)$.
Si scriva quindi la Lagrangiana del sistema in termini delle coordinate (z, θ) e delle loro derivate.
2. Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti.

3. Si riconosca che il sistema ammette una coordinata ciclica e si identifichi il momento conservato corrispondente (si chiami A il suo valore). Usando la legge di conservazione di tale momento, si esprima $\dot{\theta}$ in termini di A, z, \dot{z} .
4. Si scriva l'espressione dell'energia meccanica E del sistema. Si sostituisca l'espressione di $\dot{\theta}$ in termini di A, z, \dot{z} ricavata al punto precedente in quella dell'energia meccanica, e si esprima quest'ultima in termini di A e delle sole variabili (z, \dot{z}) . Si identifichi quindi il potenziale efficace $V_{eff}(z)$.
5. Si determini l'equazione delle curve di livello nel piano (z, \dot{z}) e se ne disegni il grafico, per $A > 0$ fissato, al variare dell'energia E . Si discuta la natura qualitativa del moto della variabile z .
6. Si determinino le condizioni sui dati iniziali affinché il moto *complessivo* del sistema sia periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito. Esistono dati iniziali per cui il moto complessivo non è periodico? Se sì, qual è la natura di tali moti non periodici?