FM210 - Soluzioni Tutorato 10
Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Guido Gentile
Tutore: Shulamit Terracina

18 Maggio 2021

Esercizio 1 (Noether, Routh e stabilità pde) Si consideri un punto materiale di massa m in tre dimensioni, soggetto ad un campo di forze di energia potenziale $U(x, y, z)$ soddisfacente il seguente requisito: il potenziale è invariate rispetto al gruppo di trasformazioni g_α tale che:

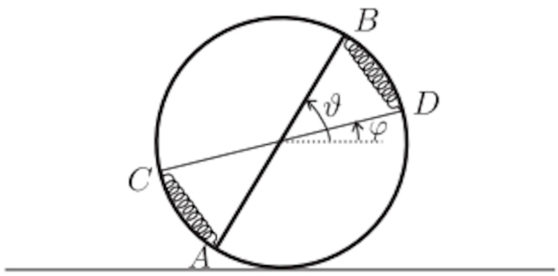
$$g_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ell\alpha \end{pmatrix},$$

dove $\ell > 0$ è una costante (con le dimensioni fisiche di lunghezza).

- Si trovi l'integrale primo corrispondente alla simmetria dell'energia potenziale e si determini un sistema di coordinate adattato (r, θ, z).
- Usando la simmetria del sistema si riduca di uno il numero di gradi di libertà, introducendo un'opportuna Lagrangiana ridotta. Determinare gli equilibri di tale Lagrangiana ridotta.
- Si studi la stabilità degli equilibri nel caso particolare:

$$V(r, \theta, z) = \frac{V_0}{r^2(\cos^2(\theta - z/\ell) - \sin^2(\theta - z/\ell))}.$$

Esercizio 2 Un anello omogeneo di massa M e raggio R può rotolare senza strisciare su una guida rettilinea orizzontale. Un'asta omogenea di massa m e lunghezza $2R$ può ruotare nel piano dell'anello, mantenendo il suo punto medio coincidente col centro dell'anello. Sul sistema agiscono due forze elastiche di ugual costante elastica k che legano gli estremi A e B dell'asta a due punti C e D diametralmente opposti dell'anello. Si faccia riferimento alle coordinate lagrangiane φ e θ indicate in figura.



1. Si scriva la lagrangiana del sistema e utilizzando il teorema di Noether si costruisca una costante del moto (oltre all'energia).
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne studi la stabilità;
3. * assumendo $M = m$ si ricavino poi le equazioni del moto linearizzate attorno a una qualsiasi di esse.
4. * Si scriva l'integrale generale del sistema linearizzato.

I punti con * sono "complementi" e prima di farli consiglio di leggere il capitolo 14 delle dispense del Prof. Gentile.

Esercizio 3 Un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi sulla superficie di un toro, di equazione parametrica

$$\begin{aligned} x &= (L + R\sin\theta)\cos\phi \\ y &= (L + R\sin\theta)\sin\phi \\ z &= R\cos\theta, \end{aligned}$$

con $R < L$. La superficie assegnata è un toro in $\mathbb{R}^3$.

Caso 1 La forza di gravità agisce lungo l'asse delle z nella direzione discendente.

Caso 2 La forza di gravità agisce lungo l'asse delle x nella direzione decrescente.

Caso 3 La forza di gravità è trascurabile.

Per tutti e tre i casi:

- Scrivi le equazioni del moto.
- Determina eventuali integrali primi.
- Determina le soluzioni di equilibrio e discutine la stabilità.
- Riduci i gradi di libertà se possibile e analizza qualitativamenteil moto.

Esercizio 3 Un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi sulla superficie di equazione $z = -\sqrt{l^2 + x^2 + y^2}$. Il punto è all'estremo di una molla di costante elastica k, che ha l'altro estremo fissato nell'origine. Sul punto agisce anche la forza di gravità, verso la direzione negativa dell'asse delle z.

- Si parametrizzi la superficie del vincolo usando opportune coordinate e si scrivano la Lagrangiana e le equazioni del moto.
- Si trovino le posizioni di equilibrio e la loro stabilità
- Utilizzando la ciclicità di una variabile, ridurre i gradi di libertà della Lagrangiana e svolgere l'analisi qualitativa del sistema.
- Si scriva l'espressione dell'orbita.

Domande varie

a) Trova almeno due famiglie di moti periodici.

b) Determina le condizioni iniziali tali che il punto passi per $r = 0$.

c) Studia qualitativamente il moto per i dati iniziali tali che $\dot{\phi}_0 = 0$.

d) (**) Scrivere le equazioni del moto nel caso in cui sul punto materiale agisca una forza di attrito proporzionale alla velocità e diretta nel verso opposto della velocità stessa. Provare che l'energia meccanica decresce. Decresce anche il momento della quantità di moto?

Studiare il limite di $r(t)$ per $t \to +\infty$ al variare dei dati iniziali.