FM210 - Soluzioni Tutorato 10
Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Guido Gentile
Tutore: Shulamit Terracina

18 Maggio 2021

Esercizio 1 (Noether, Routh e stabilità pde) Si consideri un punto materiale di massa m in tre dimensioni, soggetto ad un campo di forze di energia potenziale $U(x, y, z)$ soddisfacente il seguente requisito: il potenziale è invariate rispetto al gruppo di trasformazioni g_α tale che:

$$g_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ell\alpha \end{pmatrix},$$

dove $\ell > 0$ è una costante (con le dimensioni fisiche di lunghezza).

- Si trovi l'integrale primo corrispondente alla simmetria dell'energia potenziale e si determini un sistema di coordinate adattato (r, θ, z).
- Usando la simmetria del sistema si riduca di uno il numero di gradi di libertà, introducendo un'opportuna Lagrangiana ridotta. Determinare gli equilibri di tale Lagrangiana ridotta.
- Si studi la stabilità degli equilibri nel caso particolare:

$$V(r, \theta, z) = \frac{V_0}{r^2(\cos^2(\theta - z/\ell) - \sin^2(\theta - z/\ell))}.$$

Soluzione

- Innanzitutto si noti che la trasformazione sulle velovità indotta dalla trasformazione $\mathbf{x} \to g_\alpha(\mathbf{x})$ è

$$\dot{\mathbf{x}} \to \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{x}},$$

che lascia invariata l'energia cinetica $\frac{m}{2}\dot{x}^2$ del sistema. Quindi il gruppo di trasformazioni g_α lascia invariata la Lagrangiana meccanica $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - U(\mathbf{x})$ e, per il teorema di Noether, il sistema ammette la seguente grandezza conservata:

$$I = I(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}},$$

dove

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{dg_\alpha(\mathbf{x})}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ \ell \end{pmatrix}$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = m\dot{\mathbf{x}}.$$

Di conseguenza:

$$I = I(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = m(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1 + \ell\dot{x}_3).$$

Per effettuare il metodo di riduzione di Routh è conveniente passare (almeno temporaneamente) a coordinate cilindriche, in termini delle quali

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

e

$$\dot{x} = \dot{r}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + r\dot{\theta}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{z}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

cosicché

$$\dot{\mathbf{x}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2.$$

Quindi, la Lagrangiana del sistema in coordinate cilindriche è

$$\tilde{\mathcal{L}}(r, \theta, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) - V(r, \theta, z),$$

dove $V(r, \theta, z) \equiv U(\mathbf{x}(r, \theta, z))$ è invariante sotto la seguente trasformazione, che lascia invariata r: $\theta \to \theta + \alpha$, $z \to z + \ell\alpha$: tale è l'espressione della trasformazione $g_\alpha(\mathbf{x})$ riespressa in coordinate cilindriche. In altre parole:

$$V(r, \theta, z) = U(\mathbf{x}(r, \theta, z) = U(r\cos\theta, r\sin\theta, z) = U(r\cos(\theta+\alpha), r\sin(\theta+\alpha), z+\ell\alpha) = V(r, \theta+\alpha, z+\ell\alpha).$$

Poiché V è invariante rispetto la trasformazione di sopra, sappiamo che per ogni α $\dfrac{\partial V}{\partial \alpha} = 0$ quindi anche in $\alpha = 0$:

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial V}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} + \frac{\partial V}{\partial \dot{Q}}\frac{\partial \dot{Q}}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial V}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial V}{\partial \theta} + \ell\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \theta} + \ell\frac{\partial V}{\partial z} = \begin{pmatrix} 1 \\ \ell \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Quindi il vettore $(1, \ell)$ è perpendicolare al vettore delle derivate parziali rispetto a θ e z quindi queste due variabili interagiscono tra loro tramite la grandezza $\theta - z/\ell$ e pertanto V è una funzione di sole due variabili: di r e della combinazione $\theta - z/\ell$:

$$V(r, \theta, z) = v(r, \theta - z/\ell),$$

per un'opportuna funzione v. Chiamiamo allora ϕ la combinazione $\theta - z/\ell$, cosicché $\phi = \theta - z/\ell \Leftrightarrow z = \ell(\theta - \phi)$ e cambiamo coordinate, da (r, θ, z) a (r, θ, ϕ). Nelle nuove coordinate la Lagrangiana prende la forma:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{L}}(r, \theta, \phi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) &= \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \ell^2(\dot{\theta} - \dot{\phi})^2\right] - v(r, \phi) \\
&= \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + (r^2 + \ell^2)\dot{\theta}^2 + \ell^2\dot{\phi}^2 - 2\ell^2\dot{\theta}\,\dot{\phi}\right] - v(r, \phi).
\end{aligned}$$

In termini di queste variabili la variabile θ è ciclica, i.e., $\bar{\mathcal{L}}$ è indipendente dalla variabile θ (d'ora in poi scriveremo quindi $\bar{\mathcal{L}} = \bar{\mathcal{L}}(r, \phi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$). Quindi il momento coniugato

$$I = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\theta}} = m(r^2 + \ell^2)\dot{\theta} - m\ell^2\dot{\phi}$$

è una grandezza conservata (che altro non è che la 'carica di Noether' I, già introdotta sopra, espressa nelle nuove variabili).

- La legge di conservazione per I può essere usata per eliminare $\dot{\theta}$ in funzione delle altre variabili:

$$\dot{\theta} = \frac{I + m\ell^2\dot{\phi}}{m(r^2 + \ell^2)}.$$

A questo punto, sulla superficie a I costante, possiamo ridurre il sistema di un grado di libertà usando il metodo di Routh. La Lagrangiana ridotta (parametrizzata dal valore I della grandezza conservata) è:

$$\begin{aligned}
&\bar{\mathcal{L}}_R(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}) = \bar{\mathcal{L}}(r, \phi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) - I\dot{\theta}\Big|_{\dot{\theta} = \frac{I + m\ell^2\dot{\phi}}{m(r^2+\ell^2)}} \\
&= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m(r^2 + \ell^2)}{2}\frac{(I + m\ell^2\dot{\phi})^2}{m^2(r^2 + \ell^2)^2} + \frac{m}{2}\ell^2\dot{\phi}^2 - m\ell^2\dot{\phi}\frac{I + m\ell^2\dot{\phi}}{m(r^2 + \ell^2)} - \frac{I(I + m\ell^2\dot{\phi})}{m(r^2 + \ell^2)} - v(r, \phi) \\
&= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}\ell^2\dot{\phi}^2 - \frac{(I + m\ell^2\dot{\phi})^2}{2m(r^2 + \ell^2)} - v(r, \phi) \\
&\equiv \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{a(r)}{2}\dot{\phi}^2 - b(r)\dot{\phi} - W(r, \phi), \qquad (1)
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo introdotto il *potenziale efficace* $W(r, \phi)$:

$$W(r, \phi) = \frac{I^2}{2m(r^2 + \ell^2)} + v(r, \phi)$$

e le funzioni

$$a(r) = \frac{m\ell^2 r^2}{r^2 + \ell^2}, \qquad b(r) = \frac{I\ell^2}{r^2 + \ell^2}$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti sono:

$$\begin{cases} m\ddot{r} = \frac{(I+m\ell^2\dot{\phi})^2}{m(r^2+\ell^2)^2}r - \frac{\partial v(r,\phi)}{\partial r} \\ \frac{d}{dt}\left[m\ell^2\dot{\phi} - \frac{\ell^2(I+m\ell^2\dot{\phi})}{r^2+\ell^2}\right] = -\frac{\partial v(r,\phi)}{\partial \phi} \end{cases} \iff \begin{cases} m\ddot{r} = \frac{1}{2}a'(r)\dot{\phi}^2 - b'(r)\dot{\phi} - \frac{\partial W(r,\phi)}{\partial r} \\ \frac{d}{dt}\left[a(r)\dot{\phi} - b(r)\right] = -\frac{\partial W(r,\phi)}{\partial \phi} \end{cases}$$

Si noti che le soluzioni alle equazioni di Eulero-Lagrange conservano la seguente energia generalizzata:

$$E = \dot{r}\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}_R}{\partial \dot{r}} + \dot{\phi}\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}_R}{\partial \dot{\phi}} - \bar{\mathcal{L}}_R = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{a(r)}{2}\dot{\phi}^2 + W(r,\phi).$$

I punti di equilibrio sono le soluzioni di:

$$\begin{cases} \frac{\partial v(r,\phi)}{\partial r} = \frac{I^2}{m(r^2+\ell^2)^2}r \\ \frac{\partial v(r,\phi)}{\partial \phi} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial W(r,\phi)}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial W(r,\phi)}{\partial \phi} = 0 \end{cases}$$

- Nel caso particolare assegnato, il potenziale, espresso in funzione di r e ϕ, prende la forma:

$$v(r,\phi) = \frac{V_0}{r^2(\cos^2\phi - \sin^2\phi)} = \frac{V_0}{r^2\cos(2\phi)},$$

che è periodico di periodo π. Assumiamo, ad es., che $V_0 > 0$. Una discussione analoga alla seguente si può ripetere nel caso $V_0 < 0$.

Il potenziale efficace ha la forma:

$$W(r,\phi) = \frac{I^2}{2m(r^2+\ell^2)} + \frac{V_0}{r^2\cos(2\phi)}$$

e l'equazione per i punti di equilibrio è:

$$\begin{cases} -\frac{I^2 r}{m(r^2+\ell^2)^2} - \frac{2V_0}{r^3\cos(2\phi)} = 0 \\ \frac{2V_0\sin(2\phi)}{r^2\cos^2(2\phi)} = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione vediamo che $\phi = 0$ o $\phi = \frac{\pi}{2}$ (modulo π). Sostituendo nella prima troviamo

$$\frac{I^2 r}{m(r^2+\ell^2)^2} = \pm\frac{2V_0}{r^3}$$

dove il segno $+$ corrisponde al caso $\phi = \pi/2$, mentre il segno $-$ corrisponde al caso $\phi = 0$. Nel caso che stiamo considerando, in cui $V_0 > 0$, tale ammette soluzione solo se il segno al membro di destra è $+$, ovvero $\phi = \pi/2 \equiv \phi_{eq}$. In tal caso, sull'equilibrio, r è una radice di

$$(\beta-1)r^4 - 2\ell^2 r^2 - \ell^4 = 0, \quad \text{dove} \quad \beta = \frac{I^2}{2mV_0}.$$

Ora, se $\beta \leq 1$, tale equazione non ammette soluzioni fisicamente accettabili, mentre, se $\beta > 1$, ammette una soluzione fisicamente accettabile:

$$r = r_{eq} := \frac{\ell}{\sqrt{\beta-1}}\sqrt{1+\sqrt{\beta}}. \tag{2}$$

In conclusione, il sistema ammette un punto di equilibrio se e solo se $\beta > 1$, nel qual caso il punto di equilibrio è

$$(r_{eq}, \phi_{eq}) = \Big(\ell\sqrt{\frac{1+\sqrt{\beta}}{\beta-1}}, \frac{\pi}{2}\Big).$$

Per studiare la stabilità degli equilibri, calcoliamo l'Hessiano sul punto di equilibrio. Si trova:

$$\mathcal{H}(r_{eq}, \phi_{eq}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 W(r_{eq},\phi_{eq})}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 W(r_{eq},\phi_{eq})}{\partial r \partial \phi} \\ \frac{\partial^2 W(r_{eq},\phi_{eq})}{\partial r \partial \phi} & \frac{\partial^2 W(r_{eq},\phi_{eq})}{\partial \phi^2} \end{pmatrix} = \frac{V_0}{r_{eq}^4} \begin{pmatrix} -8\frac{\sqrt{\beta}-1}{\sqrt{\beta}} & 0 \\ 0 & -4r_{eq}^2 \end{pmatrix}.$$

Visto che entrambi gli autovalori dell'Hessiano sul punto di equilibrio sono negativi, (r_{eq}, ϕ_{eq}) corrisponde a un massimo proprio non degenere del potenziale efficace, e quindi il punto di equilibrio è *instabile*.

Esercizio 2 Un anello omogeneo di massa M e raggio R può rotolare senza strisciare su una guida rettilinea orizzontale. Un'asta omogenea di massa m e lunghezza $2R$ può ruotare nel piano dell'anello, mantenendo il suo punto medio coincidente col centro dell'anello. Sul sistema agiscono due forze elastiche di ugual costante elastica k che legano gli estremi A e B dell'asta a due punti C e D diametralmente opposti dell'anello. Si faccia riferimento alle coordinate lagrangiane ϕ e θ indicate in figura.

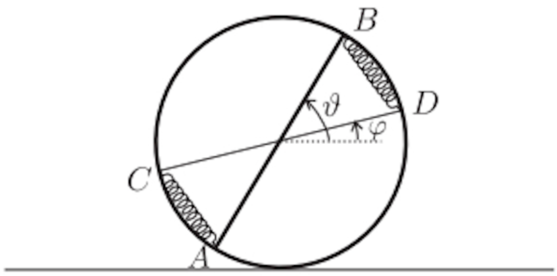

Figura 1:

1. Si scriva la lagrangiana del sistema e utilizzando il teorema di Noether si costruisca una costante del moto (oltre all'energia).
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne studi la stabilità;
3. * assumendo $M = m$ si ricavino poi le equazioni del moto linearizzate attorno a una qualsiasi di esse.
4. * Si scriva l'integrale generale del sistema linearizzato.

I punti con * sono "complementi" **non svolti a lezione** e prima di farli, per chi vuole farli consiglio di leggere il capitolo 14 delle dispense del Prof. Gentile.

Soluzione

1. L'energia cinetica dell'anello (teorema di König) è $K_M = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$, dove $I = MR^2$ è il momento d'inerzia dell'anello rispetto all'asse centrale ortogonale e $v = -R\dot{\varphi}$ e la velocità del centro di massa, pertanto

$$K_M = MR^2\dot{\varphi}^2$$

Allo stesso modo l'energia cinetica dell'asta (il cui momento d'inerzia rispetto allo stesso asse è $I' = \frac{m(2R)^2}{12} = \frac{mR^2}{3}$) è

$$K_m = \frac{1}{2}mR^2\big(\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{3}\dot{\theta}^2\big)$$

Mettendo assieme si trova

$$K = \frac{1}{2}\big[(2M+m)R^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{3}\dot{\theta}^2\big]$$

L'energia potenziale è poi $\frac{1}{2}kd^2$ per ciascuna delle due forze elastiche, con (teorema del coseno) $d^2 = 2R^2[1-\cos(\theta-\varphi)]$, pertanto

$$V = -2kR^2\cos(\theta-\varphi) + \text{cost.}$$

La lagrangiana è dunque

$$L(\varphi,\theta,\dot{\varphi},\dot{\theta})) = \frac{1}{2}\big[(2M+m)R^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{3}\dot{\theta}^2\big] + 2kR^2\cos(\theta-\varphi)$$

La lagrangiana dipende da φ e θ solo attraverso la differenza $\theta-\varphi$, pertanto è invariante sotto la traslazione

$$\varphi \mapsto \varphi' = \varphi + \alpha, \quad \theta \mapsto \theta' = \theta + \alpha \tag{*}$$

(che non tocca le velocità $\dot{\varphi},\dot{\theta}$). Il teorema di Noether ci assicura allora che si conserva la quantità

$$P = p_\varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial\alpha} + p_\theta\frac{\partial\theta'}{\partial\alpha} = p_\varphi + p_\theta = (2M+m)R^2\dot{\varphi} + \frac{1}{3}mR^2\dot{\theta}$$

(non occorre valutare in $\alpha = 0$ perché l'espressione è indipendente da α).

2. Le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{cases} (2M+m)\ddot{\varphi} = 2k\sin(\theta-\varphi) \\ \frac{1}{3}m\ddot{\theta} = -2k\sin(\theta-\varphi) \end{cases}$$

Vediamo quindi che ci sono infiniti punti di equilibrio: (a) φ qualsiasi e $\theta = \varphi$

(b) φ qualsiasi e $\theta = \varphi + \pi$

Per discutere la stabilità di queste soluzioni, calcoliamo la matrice hessiana di V:

$$H(\varphi,\theta) = 2kR^2\cos(\theta-\varphi)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolando $H(\varphi, \theta)$ nei punti di equilibrio di tipo (a) e (b) si rispettivamente trovano le seguenti due matrici:

$$H_a = H(\varphi, \varphi) = 2kR^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad H_b = H(\varphi, \varphi + \pi) = -H_a$$

Entrambe le matrici hanno determinante nullo.

Più precisamente, H_a ha un autovalore nullo e uno positivo: questa è la tipica situazione in cui l'analisi delle derivate seconde di V non basta a capire se l'equilibrio sia stabile. Invece H_b, accanto all'autovalore nullo, ha un autovalore negativo, la cui presenza assicura l'instabilità.

Le configurazioni di equilibrio di tipo (b) sono dunque sicuramente instabili. In realtà anche le configurazioni di tipo (a) sono instabili. Lo si intuisce perché V è esattamente piatto in una direzione, quella corrispondente ad avanzare φ e θ di una stessa quantità come in (*).

Formalmente l'instabilità si dimostra osservando che arbitrariamente vicino al punto di equilibrio

$$(\varphi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\theta}) = (\varphi^*, \varphi^*, 0, 0)$$

c'è un dato iniziale $(\varphi^*, \varphi^*, \varepsilon, \varepsilon)$ cui corrisponde un moto

$$\varphi(t) = \varphi^* + \varepsilon t, \quad \theta(t) = \varphi(t)$$

che si allontana da $(\varphi^*, \varphi^*, 0, 0)$. (è immediato verificare che questo moto soddisfa le equazioni di Lagrange del sistema: infatti $\ddot{\theta} = \ddot{\varphi} = 0$, e insieme $\sin(\theta - \varphi) = 0$). Quindi abbiamo ottenuto l'instabilità.

3. Linearizziamo ora il sistema attorno a una configurazione di equilibrio; per fissare le idee prendiamo una soluzione di tipo (a) e denotiamo per semplicità $H = H_a$. La matrice cinetica è diagonale e costante, e per $M = m$ è

$$A = mR^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

La matrice H conviene riscriverla mettendo a fattore mR^2 si ottiene

$$H = mR^2 \begin{pmatrix} 2\Omega^2 & -2\Omega^2 \\ -2\Omega^2 & 2\Omega^2 \end{pmatrix}, \quad \text{dove} \quad \Omega^2 = \frac{k}{m}$$

L'equazione "caratteristica" $det(B - \lambda A) = 0$ si scrive allora come:

$$det \begin{pmatrix} 2\Omega^2 - 3\lambda & -2\Omega^2 \\ -2\Omega^2 & 2\Omega^2 - \frac{1}{3}\lambda \end{pmatrix} = 0$$

ovvero $\lambda^2 - \frac{20}{3}\Omega^2\lambda = 0$ e le soluzioni sono $\lambda = 0$ e $\lambda = \frac{20}{3}\Omega^2$.

Sia $(\varphi, \theta) = (\varphi^*, \varphi^*)$ il valore di equilibrio; trasliamo l'origine su questo punto ponendo

$$q_1 = \varphi - \varphi^* \qquad q_2 = \theta - \varphi^*$$

Posto $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ le equazioni linearizzate sono

$$A\ddot{\mathbf{q}} = B\mathbf{q} = 0$$

cioè

$$3m\ddot{q}_1 + 2k(q_1 - q_2) = 0, \quad \frac{1}{3}m\ddot{q}_2 - 2k(q_1 - q_2) = 0$$

4. La soluzione generale, in questo caso in cui un autovalore è nullo e l'altro positivo, ha la forma

$$\mathbf{q}(t) = (a + bt)\mathbf{u}^{(1)} + \mathcal{A}\cos(\omega t + \alpha)\mathbf{u}^{(2)}$$

dove $a, b, \mathcal{A}, \alpha$ sono le quattro costanti di integrazione mentre $\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}$ sono gli autovettori corrispondenti rispettivamente a $\lambda = 0$ e $\lambda = \frac{20}{3}\Omega^2$ (il moto appare come sovrapposizione di un punto materiale libero e di un oscillatore armonico). Si trova facilmente

$$\mathbf{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

e sostituendo si trova la soluzione:

$$\begin{cases} \varphi = \varphi^* + a + bt + \mathcal{A}\cos(\omega t + \alpha) \\ \theta = \varphi^* + a + bt - 9\mathcal{A}\cos(\omega t + \alpha) \end{cases}$$

Soluzione alternativa C'è un modo migliore di procedere per studiare questo sistema, a partire dalle equazioni di Eulero-Lagrange. Queste equazioni infatti hanno struttura identica a quelle del problema (unidimensionale) a due corpi, con masse $m' = 2M + m, m'' = \frac{1}{3}m$. Le equazioni pertanto si disaccoppiano, e tutto lo studio si semplifica, procedendo come nel problema dei due corpi, cioè introducendo come coordinate, al posto di φ e θ, una coordinata di centro di massa Ψ ed una coordinata relativa ψ:

$$\Psi = \frac{(2M + m)\varphi + \frac{1}{3}m\theta}{2M + \frac{4}{3}m}, \qquad \psi = \theta - \varphi$$

Le equazioni del moto nelle nuove variabili divengono banalmente

$$\ddot{\Psi} = 0, \qquad \mu\ddot{\psi} = -2k\sin\psi$$

dove μ è la massa ridotta:

$$\mu = \frac{m'm''}{m' + m''} = \frac{m(2M + m)}{6M + m}$$

Il sistema (vero, non linearizzato) si vede cos'ı essere composto da un punto libero e da un pendolo, e tutto lo studio diventa pi'u chiaro (equilibrio, stabilità, linearizzazione). In qualunque momento, invertendo il cambio di coordinate si trasporta il risultato alle variabili originarie θ, φ.

Esercizio 3 Un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi sulla superficie di un toro, di equazione parametrica

$$\begin{array}{rcl} x & = & (L + R\sin\theta)\cos\phi \\ y & = & (L + R\sin\theta)\sin\phi \\ z & = & R\cos\theta, \end{array}$$

con $R < L$. La superficie assegnata è un toro in $\mathbb{R}^3$.
Caso 1 La forza di gravità agisce lungo l'asse delle z nella direzione discendente.
Caso 2 La forza di gravità agisce lungo l'asse delle x nella direzione decrescente.
Caso 3 La forza di gravità è trascurabile.
Per tutti e tre i casi:

- Scrivi le equazioni del moto.
- Determina eventuali integrali primi.
- Determina le soluzioni di equilibrio e discutine la stabilità.
- Riduci i gradi di libertà se possibile e analizza qualitativamenteil moto.

Soluzione Scriviamo le coordinate di un generico punto P:

$$P(x, y, z) = \Big((L + R\sin\theta)\cos\phi, (L + R\sin\theta)\sin\phi, R\cos\theta\Big),$$

la sua velocità

$$\dot{P} = \Big(\dot{\theta}R\cos\theta\cos\phi - (L+R\sin\theta)\dot{\phi}\sin\phi, \dot{\theta}R\cos\theta\sin\phi - (L+R\sin\theta)\dot{\phi}\cos\phi, -\dot{\theta}R\sin\theta\Big)$$

e scriviamoci l'energia cinetica (che non dipende da come agisce la forza di gravità):

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\theta}^2 R^2 + \dot{\phi}^2(L + R\sin\theta))$$

Caso 1

$$U = mgz_P = mg\cos\theta$$

Quindi la Lagrangiana è

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\theta}^2 R^2 + \dot{\phi}^2(L + R\sin\theta)) - mg\cos\theta$$

e le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{cases} m\ddot{\theta} = \frac{m}{2R}\dot{\phi}^2\cos\theta - mgR\sin\theta \\ m\ddot{\phi} = -\frac{m\dot{\phi}R\cos\theta}{L+R\sin\theta} \end{cases}$$

Oss Ho potuto dividere per la grandezza $L + R\sin\theta$ perché non nulla.
Una grandezza conservata è ovviamente l'energia generalizzata $E = T + U$ mentre un'altra è data dalla ciclicità della variabile φ:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = m\dot{\phi}(L + R\sin\theta) =: A \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{A^2}{m(L + R\sin\theta)}$$

Scriviamoci la lagrangiana ridotta:

$$
\begin{aligned}
L_R(\theta,\dot\theta) &= \frac{m}{2}(\dot\theta^2R^2+\dot\phi^2(L+R\sin\theta))-mg\cos\theta-\frac{A^2}{m(L+R\sin\theta)}\Big|_{\dot\phi=\frac{A^2}{m(L+R\sin\theta)}}\\
&=\frac{mR^2\dot\theta^2}{2}-V_{eff}\qquad V_{eff}=\frac{A^2}{2m(L+R\sin\theta)}+mgR\cos\theta
\end{aligned}
$$

Studiando poi il potenziale efficace e la sua derivata

$$
V'_{eff}=-\frac{A^2\sin\theta}{2m(L+R\sin\theta)}-mgR\sin\theta
$$

Otteniamo che sono punti di equilibrio i punti della forma $(2k\pi,0)$ e $((2k+1)\pi,0)$ che sono rispettivamente instabili e stabili.
Caso 2

$$
U=mgx_P=mg(L+R\sin\theta)\sin\phi
$$

Quindi la Lagrangiana è

$$
L=\frac{m}{2}(\dot\theta^2R^2+\dot\phi^2(L+R\sin\theta))-mg(L+R\sin\theta)\sin\phi
$$

e le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$
\begin{cases}
m\ddot\theta=\frac{m}{R}\cos\theta(\frac{\dot\phi^2}{2}-g\cos\phi)\\
m\ddot\phi=-\frac{m\dot\phi\dot\theta R\cos\theta}{L+R\sin\theta}+mg\sin\phi
\end{cases}
$$

Oss Ho potuto dividere per la grandezza $L+R\sin\theta$ perché non nulla.
Una grandezza conservata è ovviamente l'energia generalizzata $E=T+U$
Per trovare i punti di equilibrio, utilizziamo l'equivalenza tra le equazioni di Newton e le equazioni di Eulero Lagrange risolvendo

$$
\begin{cases}
\cos\theta\cos\phi=0\\
(L+R\sin\theta)\sin\phi=0
\end{cases}
$$

I punti di equilibrio sono della forma $(\frac{\pi}{2}+k\pi,k\pi,0,0)$.
Caso 3 Punto libero sul toro. La Lagrangiana è

$$
L=\frac{m}{2}(\dot\theta^2R^2+\dot\phi^2(L+R\sin\theta))
$$

e le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$
\begin{cases}
m\ddot\theta=\frac{m}{R}\cos\theta\frac{\dot\phi^2}{2}\\
m\ddot\phi=-\frac{m\dot\phi\dot\theta R\cos\theta}{L+R\sin\theta}
\end{cases}
$$

Anche in questo caso, oltre all'energia generalizzata, come grandezza conservata abbiamo anche

$$
\frac{\partial L}{\partial\dot\phi}=m\dot\phi(L+R\sin\theta)=:A\Rightarrow\dot\phi=\frac{A^2}{m(L+R\sin\theta)}
$$

Scriviamoci quindi la lagrangiana ridotta:

$$
\begin{aligned}
L_R(\theta,\dot\theta) &= \frac{m}{2}(\dot\theta^2 R^2 + \dot\phi^2(L+R\sin\theta)) - \frac{A^2}{m(L+R\sin\theta)}\bigg|_{\dot\phi=\frac{A^2}{m(L+R\sin\theta)}} \\
&= \frac{mR^2\dot\theta^2}{2} - V_{eff} \qquad V_{eff} = \frac{A^2}{2m(L+R\sin\theta)}
\end{aligned}
$$

Punti stabili $(\frac{\pi}{2}+2k\pi,0)$ e instabili $(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,0)$

Esercizio 3 Un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi sulla superficie di equazione $z=-\sqrt{l^2+x^2+y^2}$. Il punto è all'estremo di una molla di costante elastica k, che ha l'altro estremo fissato nell'origine. Sul punto agisce anche la forza di gravità, verso la direzione negativa dell'asse delle z.

Oss: Questo esercizio è uno delle infinite varianti del moto centrale. Infatti la superficie su cui è vincolato a muoversi il punto è invariante per rotazioni intorno all'asse z, e lo stesso invarianti sono i due campi di forza. Ovviamente tale invarianza implicherà la conservazione del momento della quantità di moto.

- Si parametrizzi la superficie del vincolo usando opportune coordinate e si scrivano la Lagrangiana e le equazioni del moto.
- Si trovino le posizioni di equilibrio e la loro stabilità
- Utilizzando la ciclicità di una variabile, ridurre i gradi di libertà della Lagrangiana e svolgere l'analisi qualitativa del sistema.
- Si scriva l'espressione dell'orbita.

Domande varie

a) Trova almeno due famiglie di moti periodici.
b) Determina le condizioni iniziali tali che il punto passi per $r=0$.
c) Studia qualitativamente il moto per i dati iniziali tali che $\dot\phi_0=0$.
d) (**) Scrivere le equazioni del moto nel caso in cui sul punto materiale agisca una forza di attrito proporzionale alla velocità e diretta nel verso opposto della velocità stessa. Provare che l'energia meccanica decresce. Decresce anche il momento della quantità di moto?

Studiare il limite di $r(t)$ per $t\to+\infty$ al variare dei dati iniziali.

Soluzione **Scelta delle coordinate ed equazioni del moto** L'invarianza per rotazioni intorno all'asse z suggerisce di utilizzare coordinate polari. Sia r la distanza dall'origine della proiezione del punto sul piano (x,y), cioè $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Sia ϕ l'angolo che la congiungente dell'origine con la proiezione forma con l'asse delle x nella direzione positiva. Con queste due coordinate posso descrivere il sistema: $x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$, $z=-\sqrt{l^2+r^2}$. Il calcolo delle velocità dà:

$$
\begin{aligned}
\dot x &= \dot r\cos\phi - r\dot\phi\sin\phi \\
\dot y &= \dot r\sin\phi + r\dot\phi\cos\phi \\
\dot z &= -\tfrac{r\dot r}{\sqrt{l^2+r^2}}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Il calcolo dell'energia cinetica dà:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2\frac{l^2+2r^2}{l^2+r^2} + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2.$$

L'energia potenziale ha due contributi: la forza di gravità che dà il contributo $-mg\sqrt{l^2+r^2}$ e la molla che dà il contributo $\frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2) = \frac{1}{2}k(l^2+2r^2)$. Elimino il termine l^2 perché non contribuisce alla determinazione del moto. In sintesi la lagrangiana è:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2\frac{l^2+2r^2}{l^2+r^2} + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 + mg\sqrt{l^2+r^2} - kr^2.$$

Il lettore proceda al calcolo delle equazioni del moto ;)

Posizioni di equilibrio La derivata dell'energia potenziale, che dipende solo da r, è

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -mgr\frac{1}{\sqrt{l^2+r^2}} + 2kr.$$

Dunque $r=0$ è un equilibrio, qualunque sia ϕ. Altri equilibri esistono se e solo se: $\sqrt{l^2+r^2} = \frac{mg}{2k}$. Quindi $r^2 = l^2\left(\left(\frac{mg}{2kl}\right)^2 - 1\right)$. L'equilibrio esiste se e solo se $\frac{mg}{2kl} \geq 1$. Ovviamente solo il valore positivo di r è accettabile, in quanto r è una variabile positiva. Sia $\bar{r} = l\sqrt{\left(\left(\frac{mg}{2kl}\right)^2 - 1\right)}$ quando esiste reale.

Quante sono le posizioni di equilibrio?

Il potenziale non dipende da ϕ, quindi qualunque sia $\bar{\phi}$ $(0,\bar{\phi})$ e $(\bar{r},\bar{\phi})$ sono posizioni di equilibrio. D'altra parte se $r=0$, qualunque sia $\bar{\phi}$ fisicamente $(0,\bar{\phi})$ è l'origine del piano. Dunque se $\frac{mg}{2kl} \leq 1$ c'è solo una posizione di equilibrio, l'origine del piano; se $\frac{mg}{2kl} > 1$ esistono altre infinite posizioni di equilibrio a distanza $\bar{r}$ dall'origine.

Sviluppano con Taylor al secondo ordine V intorno a 0 si ottiene $V(r) = -mgl^2 + kr^2\left(1 - \frac{mg}{2kl}\right)$. Dunque è stabile se $\frac{mg}{2kl} < 1$ ed è instabile se $\frac{mg}{2kl} > 1$. Considerando anche i termini r^4 si ottiene che il l'origine è stabile anche per $\frac{mg}{2kl} = 1$.

Le altre infinite posizioni di equilibrio, quando esistono, sono instabili pur essendo dei minimi per V considerato nella sola variabile r. Infatti come funzione di (r,ϕ), sono dei minimi non stretti.

Riduzione dei gradi di libertà e analisi qualitativa L'invarianza per rotazioni ha come conseguenza che la variabile ϕ è ciclica. Dunque il momento coniugato si conserva: $P = p_\phi = mr^2\dot{\phi}$ è un integrale primo del moto. Sostituendolo nell'espressione dell'energia meccanica si ottiene:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2\frac{l^2+2r^2}{l^2+r^2} + \frac{1}{2mr^2}P^2 - mg\sqrt{l^2+r^2} + kr^2.$$

Indico con $V_e = +\frac{1}{2mr^2}P^2 - mg\sqrt{l^2+r^2} + kr^2$, l'energia potenziale efficace. La derivata di V_e è:

$$V_e' = -\frac{P^2}{mr^3} - r\frac{mg}{\sqrt{l^2+r^2}} + 2kr.$$

Come spesso accade la soluzione esplicita di $V_e'(r) = 0$ non sembra essere possibile esplicitamente (esce un'equazione in r^8, r^4 e r^2). Bisogna tentare di capire qualitativamente se esistono soluzioni. L'equazione è:

$$\frac{P^2}{mr^4} = k - \frac{mg}{\sqrt{l^2 + r^2}}.$$

Disegnando il grafico delle due funzioni si capisce che esiste sempre una posizione di equilibrio. Inoltre è unica perché la funzione a sinistra è decrescente e la funzione a destra è crescente.

Disegnando il grafico dell'energia potenziale efficace si vede che l'equilibrio è un minimo, quindi è stabile.

Il lettore completi l'esercizio scrivendo le formule di quadratura per il moto complessivo, e discuta qualitativamente il moto.

La rappresentazione dell'orbita Come in tutti i casi di potenziali centrali, può essere utile determinare l'orbita nelle variabili (r, ϕ), cioè la funzione $r(\phi)$.

Si procede nel modo seguente. Dalla relazione $\dot{\phi} = \frac{P}{mr^2}$ si scopre che la funzione $t \to \phi$ è strettamente monotona (crescente se P è positivo). Ma allora: $\dot{r} = \frac{\partial r}{\partial \phi}\dot{\phi}$. Quindi

$$\frac{\partial r}{\partial \phi} = \frac{mr^2}{P}\dot{r} = \pm \frac{mr^2}{P}\sqrt{\frac{2}{m}\frac{l^2 + r^2}{l^2 + 2r^2}(E - V_e(r))}.$$

Da cui si ottiene l'espressione implicita per l'orbita:

$$\phi = \pm \int^r dr \frac{P}{mr^2}\sqrt{\frac{m}{2}\frac{l^2 + 2r^2}{l^2 + r^2}}\frac{1}{\sqrt{E - V_e(r)}}.$$

Domande varie

a) Trova almeno due famiglie di moti periodici.

b) Determina le condizioni iniziali tali che il punto passi per $r = 0$.

c) Studia qualitativamente il moto per i dati iniziali tali che $\dot{\phi}_0 = 0$.

d) (**) Scrivere le equazioni del moto nel caso in cui sul punto materiale agisca una forza di attrito proporzionale alla velocità e diretta nel verso opposto della velocità stessa. Provare che l'energia meccanica decresce. Decresce anche il momento della quantità di moto?

Studiare il limite di $r(t)$ per $t \to +\infty$ al variare dei dati iniziali.