FM210 - Tutorato 11
Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Livia Corsi
Tutore: Shulamit Terracina

25 Maggio 2020

Esercizio 1: Trasformata di Legendre su $\mathbb{R}$ Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione C^2 e convessa e ricordando che la trasformata di Legendre è definita come

$$f^*(y) := \sup_{x\in\mathbb{R}} \big(xy - f(x)\big)$$

Dimostrare le seguenti proprietà:

1. f^* è convessa e C^2
2. $f^{**} = f$

Inoltre si calcoli la trasformata di Legendre delle seguenti funzioni:

- $f(x) = x^2$
- $f(x) = e^x$
- $f(x) = x \log x$
- $f(x) = x^4$

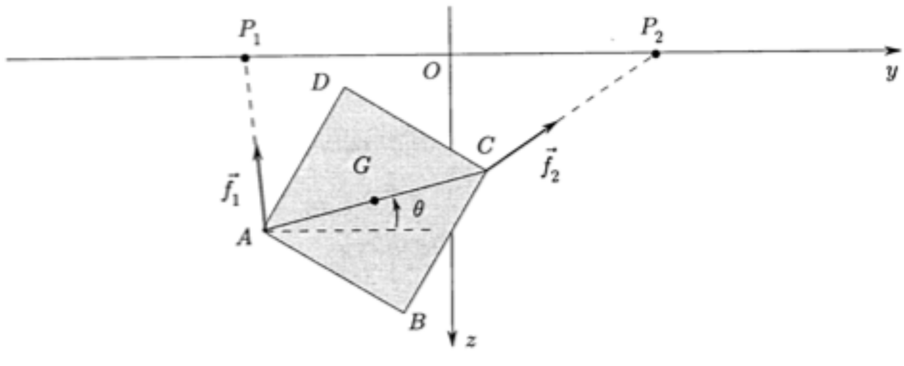
Esercizio 2 Data l'hamiltoniana $\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 + V(q)$, calcolare le equazioni di Hamilton.

Esercizio 3: Matrici Simplettiche Consideriamo lo spazio $\mathbb{R}^{2n}$. Ricordo che una matrice A è detta simplettica se $E = A^T E A$, dove E è la matrice simplettica standard.

Si dimostri che le matrici simplettiche formano un gruppo rispetto la moltiplicazione tra matrici (Gruppo: chiusura rispetto l'operazione, proprietà associativa, esistenza dell'elemento neutro e dell'inverso) e che la trasposta di una matrice simplettica è simplettica.

Esercizio 4: Problema dei due corpi Dati due punti materiali P_1 e P_2 di masse rispettivamente m_1 e m_2 soggetti solamente alla forza di interazione tra i due, ossia la forza gravitazionale, scrivere, tramite le coordinate polari la lagrangiana del sistema, osservare che una variabile è ciclica e calcolare la lagrangiana ridotta. Scrivere inoltre l'hamiltoniana che descrive tale sistema e le equazioni di Hamilton associate.

Esercizio 5 (Lagrangiane, Koenig, EL) Una lamina piana quadrata $ABCD$, omogenea, pesante, di massa M e lato ℓ, è vincolata (senza attrito) a muoversi su un piano verticale. Sui vertici A e C della lamina agiscono rispettivamente due forze elastiche di costante elastica k e centri $P_1 = (0, -d, 0)$ e $P_2 = (0, d, 0)$. Si assumano come coordinate lagrangiane le coordinate y e z del baricentro e e l'angolo θ che la diagonale AC forma con l'asse y, come in figura. Si scrivano la Lagrangiana del sistema, le equazioni di Eulero-Lagrange e le si risolvano.



Esercizio 6 (Hamiltoniana e equazioni di Hamilton) Data la lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + q\dot{q} + 3q^2$$

scrivere la corrispondente Hamiltoniana e risolvere le equazioni di Hamilton associate.

Esercizio 7 (trasformazioni canoniche) Dire per quali valori di α e β la seguente trasformazione è canonica

$$\begin{cases} P = \alpha p e^{\beta q} \\ Q = \frac{1}{\alpha} e^{-\beta q} \end{cases} .$$

Trovare una trasformazione generatrice in corrispondenza di tali valori.

Esercizio 8 (trasformazioni canoniche) Si consideri la seguente trasformazione di coordinate:

$$\begin{cases} Q = -p\sqrt{\dfrac{1-qp}{1+qp}}, \\ P = q\sqrt{\dfrac{1+qp}{1-qp}} \end{cases} .$$

(1) Si calcolino le derivate parziali di Q e P rispetto a q e p, e si dimostri che la trasformazione è canonica verificando che si conservano le parentesi di Poisson fondamentali.
(2) Si dimostri che $qp = -QP$ e si utilizzi tale risultato per ricavare q in termini di Q e P a partire dall'espressione di P in termini di q e p.
(3) Esplicitando anche p in funzione di Q e P, si calcoli la trasformazione inversa della trasformazione data.
(4) Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$.
(5) Si consideri il sistema hamiltoniano descritto dall'hamiltoniana $H(q, p) = q^2 (1 + qp) (1 - qp)^{-1}$: si calcoli l'hamiltoniana nelle variabili (Q, P).
(6) Si usi il risultato del punto precedente per determinare esplicitamente la soluzione $(q(t), p(t))$ con dati iniziali $(q(0), p(0)) = (1, 0)$.