FM210 - Soluzioni Tutorato 11
Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Livia Corsi
Tutore: Shulamit Terracina

25 Maggio 2020

Esercizio 1: Trasformata di Legendre su $\mathbb{R}$ Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione C^2 e convessa e ricordando che la trasformata di Legendre è definita come

$$f^*(y) := \sup_{x\in\mathbb{R}} \big(xy - f(x)\big)$$

Dimostrare le seguenti proprietà:

1. f^* è convessa e C^2
2. $f^{**} = f$

Inoltre si calcoli la trasformata di Legendre delle seguenti funzioni:

- $f(x) = x^2$
- $f(x) = e^x$
- $f(x) = x \log x$
- $f(x) = x^4$

Soluzioni

1. Ricordando che se $f \in C^2$ e convessa allora possiamo derivarla e trovare il punto di massimo di f^* che chiamiamo $x(t)$, allora $f^*(y) = x(y)y - f(x(y))$.

$$\frac{df^*(y)}{dy} \overset{C-R}{=} \frac{dx(y)}{d(y)}y + x(y) - \frac{df(x(y))}{dx}\frac{dx(y)}{dy} \overset{lin}{=} \frac{dx(y)}{dy}\left(y - \frac{f(x(y))}{dx}\right) + x(y) =$$
$$= \frac{dx(y)}{dy}\left(\frac{f(x(y))}{dy} - \frac{f(x(y))}{dy}\right) + x(y)$$

dove nell'ultima uguaglianza ho usato che $\frac{f(x(y))}{dx} = y$.

Quindi vale che

$$(f^*(y))' = (f')^{-1}(x(y))$$

Dalla regola di derivazione delle funzioni inverse ottengo pertanto che

$$(f^*(x(y)))'' = \frac{1}{f''(x(y))} > 0$$

Concludendo, la derivata seconda di f^* esiste, è continua ed è positiva quindi $f^* \in \mathbb{C}^2$ ed è convessa-

2. $f^*(y) = x(y)y - f(x(y))$ con $f'(x(y)) = y$.
   $f^{**}(z) = zy(z) - f^*(y(z)) = zy(z) - x(y(z))y(z) + f(x(y(z))$ dove $(f^*(y(z))' = z$
   Devo dimostrare che $x(y(z)) = z$: $y(z) = (f^*(z)')^{-1}$ quindi

$$x(y(z)) = x((f^*(z)')^{-1}) = (f')^{-1}(f^*(z)')^{-1}) = (f')^{-1} \circ ((f^*)')^{-1}(z)$$

   Visto che so che $(f^*)' = (f')^{-1}$

$$(f')^{-1} \circ ((f^*)')^{-1} = (f')^{-1} \circ ((f')^{-1})^{-1} = Id$$

   Quindi $x(y(z)) = z$

Oss. Possiamo definire la trasformata anche per $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convessa, C^2 e con hessiano postivo, come

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (< x, y > -f(x))$$

- $f^*(y) = \frac{y^2}{4}$
- $f^*(y) = y(\log y - 1)$
- $f^*(y) = e^{y-1}$
- $f^*(y) = \frac{3y}{4} \sqrt[3]{\frac{y}{4}}$

Esercizio 2 Data l'hamiltoniana $\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 + V(q)$, calcolare le equazioni di Hamilton.

Soluzione

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{1}{m} p \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -V'(q) \end{cases}$$

Tra l'altro osserviamo che se deriviamo la prima otteniamo $\ddot{q} = \frac{1}{m}\dot{p}$ e quindi l'equazione di Newton $m\ddot{q} = -V'(q)$.

Esercizio 3: Matrici Simplettiche Consideriamo lo spazio $\mathbb{R}^{2n}$. Ricordo che una matrice A è detta simplettica se $E = A^T EA$, dove E è la matrice simplettica standard.

Si dimostri che le matrici simplettiche formano un gruppo rispetto la moltiplicazione tra matrici (Gruppo: chiusura rispetto l'operazione, proprietà associativa, esistenza dell'elemento neutro e dell'inverso) e che la trasposta di una matrice simplettica è simplettica.

Soluzione

- **Chiusura**: Siano A, B matrici simplettiche cioè tali che $E = A^T EA$ e $E = B^T EB$. $E = B^T EB = B^T (A^T EA)B = (AB)^T E(AB)$
- **Associatività**: si eredita dall'associatività delle matrici $2n \times 2n$
- **Elemento neutro**: banalmente $E = I^T EI$ quindi l'identità è simplettica
- **Inversa**: Sia A simplettica, $A^{-1} = -EA^T E$ infatti poiché $E^2 = -I$, $-1 = E^2 = E(A^T EA) = EA^T EA$. Moltiplicando per -1 abbiamo $1 = -EA^T EA = (-EA^T E)A = A^{-1}A$. Verifichiamo ora che l'inversa è simplettica: $(A^{-1})^T EA^{-1} = (-EA^T E)^T E(-EA^T E) = E^T AE^T EEA^T E = -EA(-E)EEA^T E = -EAEA^T E = EA(-EAE)^T = EAA^{-1} = E$

Quindi le matrici simplettiche formano un gruppo. Inoltre la trasposta di una matrice simplettica è simplettica: innanzitutto dalla definizione di matrice simplettica esplicitiamo la trasposta $A^T = -EA^{-1}E$. $(A^T)^T EA^T = AEA^T = AE(-EA^{-1}E) = AA^{-1}E = E$

Esercizio 4: Problema dei due corpi Dati due punti materiali P_1 e P_2 di masse rispettivamente m_1 e m_2 soggetti solamente alla forza di interazione tra i due, ossia la forza gravitazionale, scrivere, tramite le coordinate polari la lagrangiana del sistema, osservare che una variabile è ciclica e calcolare la lagrangiana ridotta. Scrivere inoltre l'hamiltoniana che descrive tale sistema e le equazioni di Hamilton associate.

Soluzione

$$V = -\frac{GM\mu}{\rho} \qquad T = \frac{\mu(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2)}{2}, \quad M = m_1 + m_2, \mu = \frac{m_1 m_2}{M}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\rho, \theta, \dot{\rho}, \dot{\theta}) = \frac{\mu}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) - V(\rho)$$

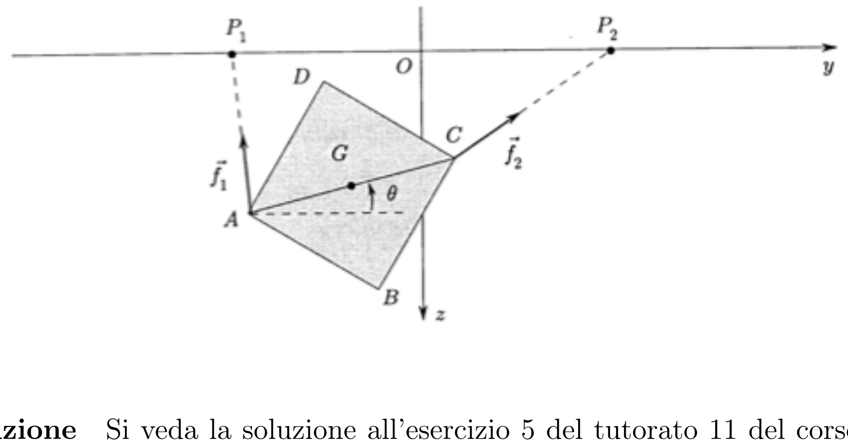
θ è ciclica e $\mathcal{L}_R = \frac{\mu}{2}\dot{\rho}^2 - (V(\rho) + \frac{A^2}{2\mu\rho^2})$ con $A = \mu\rho^2\dot{\theta}$

Definendo i momenti generalizzati $p_\rho = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} = \mu\dot{\rho}$ e $p_\theta = \mu\rho^2\dot{\theta}$

$$\mathcal{H} = \dot{\rho}p_\rho + \dot{\theta}p_\theta - \mathcal{L} = \frac{1}{2\mu}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\theta^2}{\rho^2} + V(\rho)\right)$$

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{p_\rho}{2\mu} \\ \dot{p_\rho} = \frac{p_\theta^2}{\mu\rho^3} - \frac{1}{2\mu}V'(\rho) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{2\mu\rho^2} \\ \dot{p_\theta} = 0 \end{cases}$$

Esercizio 5 (Lagrangiane, Koenig, EL) Una lamina piana quadrata $ABCD$, omogenea, pesante, di massa M e lato ℓ, è vincolata (senza attrito) a muoversi su un piano verticale. Sui vertici A e C della lamina agiscono rispettivamente due forze elastiche di costante elastica k e centri $P_1 = (0, -d, 0)$ e $P_2 = (0, d, 0)$. Si assumano come coordinate lagrangiane le coordinate y e z del baricentro e e l'angolo θ che la diagonale AC forma con l'asse y, come in figura. Si scrivano la Lagrangiana del sistema, le equazioni di Eulero-Lagrange e le si risolvano.



Soluzione Si veda la soluzione all'esercizio 5 del tutorato 11 del corso di FM210, A.A.2013/14, disponibile al link:

`http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/FM210_2013/tut11sol.pdf`

Esercizio 6 (Hamiltoniana e equazioni di Hamilton) Data la lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + q\dot{q} + 3q^2$$

scrivere la corrispondente Hamiltoniana e risolvere le equazioni di Hamilton associate.

Soluzioni Il momento coniugato alla variabile q è

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

e quindi $\dot{q} = p - q$. Pertanto $H(p, q) = p\dot{q} - L = \frac{1}{2}p^2 - pq - \frac{5}{2}q^2$.
Le corrispondenti equazioni di Hamilton sono

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = p - q \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = p + 5q \end{cases}$$

Derivando la prima equazione rispetto al tempo si ha:

$$\ddot{q} = \dot{p} - \dot{q} = 6q$$

la cui soluzione è

$$q(t) = A_1 e^{\sqrt{6}t} + A_2 e^{-\sqrt{6}t}$$

dove A_1 e A_2 sono costanti arbitrarie. Pertanto da $p = q + \dot{q}$ si ricava

$$p(t) = (A_1 + \sqrt{6}A_1)e^{\sqrt{6}t} + (A_2 - \sqrt{6}A_2)e^{-\sqrt{6}t}.$$

Esercizio 7 (trasformazioni canoniche) Dire per quali valori di α e β la seguente trasformazione è canonica

$$\begin{cases} P = \alpha p e^{\beta q} \\ Q = \frac{1}{\alpha} e^{-\beta q} \end{cases} .$$

Trovare una trasformazione generatrice in corrispondenza di tali valori.

Soluzione Usiamo le parentesi di Poisson per verificare la canonicità della trasformazione; in particolare, poiché la trasformazione è unidimensionale basta verificare la condizione

$$\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1.$$

Pertanto si ha

$$-\frac{\beta}{\alpha} e^{-\beta q} \alpha e^{\beta q} = 1$$

che è soddisfatta per $\beta = -1$ e $\alpha \neq 0$. Dunque la trasformazione diventa

$$\begin{cases} P = \alpha p e^{-q} \\ Q = \frac{1}{\alpha} e^q \end{cases} . \tag{1}$$

Cerchiamo una trasformazione generatrice $F = F(q, P)$, le cui equazioni di trasformazione sono:

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial F}{\partial q} \\ Q = \dfrac{\partial F}{\partial P} \end{cases} .$$

Dalla (1) si ha:

$$\begin{cases} p = \frac{P}{\alpha} e^q \\ Q = \frac{1}{\alpha} e^q \end{cases} .$$

Pertanto deve risultare

$$\frac{\partial F}{\partial q} = \frac{P}{\alpha} e^q$$

Ossia $F(q, P) = \frac{P}{\alpha} + f(P)$, dove $f(p)$ è una funzione della sola P. Analogamente dalla relazione

$$\frac{\partial F}{\partial P} = \frac{1}{\alpha} e^q$$

si trova $F(q, P) = \frac{P}{\alpha} e^q + g(q)$ dove $g(q)$ dipende dalla sola variabile q. Confrontando le due espressioni per la funzione generatrice si ottiene $f(P) = g(q) = 0$ e quindi

$$F(q, P) = \frac{P}{\alpha} e^q.$$

Esercizio 8 Si consideri la seguente trasformazione di coordinate:

$$\begin{cases} Q = -p\sqrt{\dfrac{1 - qp}{1 + qp}}, \\ P = q\sqrt{\dfrac{1 + qp}{1 - qp}} \end{cases} .$$

(1) Si calcolino le derivate parziali di Q e P rispetto a q e p, e si dimostri che la trasformazione è canonica verificando che si conservano le parentesi di Poisson fondamentali.
(2) Si dimostri che $qp = -QP$ e si utilizzi tale risultato per ricavare q in termini di Q e P a partire dall'espressione di P in termini di q e p.
(3) Esplicitando anche p in funzione di Q e P, si calcoli la trasformazione inversa della trasformazione data.
(4) Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$.
(5) Si consideri il sistema hamiltoniano descritto dall'hamiltoniana $H(q, p) = q^2 (1 + qp) (1 - qp)^{-1}$: si calcoli l'hamiltoniana nelle variabili (Q, P).

(6) Si usi il risultato del punto precedente per determinare esplicitamente la soluzione $(q(t), p(t))$ con dati iniziali $(q(0), p(0)) = (1, 0)$.

Soluzione Se si definisce $A := \sqrt{(1-qp)/(1+qp)}$, si può riscrivere $Q = -pA$ e $P = qA^{-1}$, così che si trova

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = -p\frac{\partial A}{\partial q}, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = -A - p\frac{\partial A}{\partial p}, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = \frac{1}{A} - \frac{q}{A^2}\frac{\partial A}{\partial q}, \quad \frac{\partial P}{\partial p} = -\frac{q}{A^2}\frac{\partial A}{\partial p},$$

dove

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial q} &= \frac{1}{2A}\frac{-p(1+qp) - p(1-qp)}{(1+qp)^2} = -\frac{1}{A}\frac{p}{(1+qp)^2}, \\
\frac{\partial A}{\partial p} &= \frac{1}{2A}\frac{-q(1+qp) - q(1-qp)}{(1+qp)^2} = -\frac{1}{A}\frac{q}{(1+qp)^2}.
\end{aligned}$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned}
\{Q, P\} &= \frac{qp}{A^2}\frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial A}{\partial p} + \left(A + p\frac{\partial A}{\partial p}\right)\left(\frac{1}{A} - \frac{q}{A^2}\frac{\partial A}{\partial q}\right) \\
&= \frac{qp}{A^2}\frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial A}{\partial p} + 1 + \frac{p}{A}\frac{\partial A}{\partial p} - \frac{q}{A}\frac{\partial A}{\partial q} - \frac{qp}{A^2}\frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial A}{\partial p} = 1 + \frac{p}{A}\frac{\partial A}{\partial p} - \frac{q}{A}\frac{\partial A}{\partial q}
\end{aligned}$$

e, ponendo $qp = x$, si trova

$$\frac{\partial A}{\partial q} = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q} = p\frac{\partial A}{\partial x}, \quad \frac{\partial A}{\partial p} = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} = q\frac{\partial A}{\partial x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{p}{A}\frac{\partial A}{\partial p} - \frac{q}{A}\frac{\partial A}{\partial q} = \frac{qp}{A}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{qp}{A}\frac{\partial A}{\partial x} = 0,$$

da cui segue che $\{Q, P\} = 1$; poiché si ha banalmente $\{Q, Q\} = \{P, P\} = 0$, se ne deduce che la trasformazione è canonica. Moltiplicando tra loro Q e P, si trova immediatamente che $QP = -qp$. Dall'espressione di P in teermini di q e p si trova

$$P^2\,(1-qp) = q^2\,(1+qp) \Longrightarrow P^2\,(1+QP) = q^2\,(1-QP) \Longrightarrow q^2 = P^2\frac{1+QP}{1-QP} \Longrightarrow q = P\sqrt{\frac{1+QP}{1-QP}},$$

dove si è utilizzato che P e q devono avere lo stesso segno (per definizione di P). Si ha inoltre

$$p = -\frac{QP}{q} = -\frac{QP}{P}\sqrt{\frac{1-QP}{1+QP}} = -Q\sqrt{\frac{1-QP}{1+QP}},$$

così che in conclusione la trasformazione inversa è data da

$$\begin{cases} q = P\sqrt{\dfrac{1+QP}{1-QP}}, \\ p = -Q\sqrt{\dfrac{1-QP}{1+QP}}. \end{cases}$$

Per determinare una funzione generatrice di seconda specie $F(q,P)$, innanzitutto si esprime p in termini di q e P, i.e.

$$P^2\,(1-qp) = q^2\,(1+qp) \quad\Longrightarrow\quad P^2-q^2 = p\,q(q^2+P^2)) \quad\Longrightarrow\quad p = \frac{P^2-q^2}{q(q^2+P^2},$$

e si impone che p sia uguale a $\partial F/\partial q$; si scrive quindi

$$\frac{P^2-q^2}{q(q^2+P^2} = \frac{A}{q} + \frac{Bq+C}{q^2+P^2} \quad\Longrightarrow\quad A=1, \quad B=-2, \quad C=0,$$

così che si ottiene

$$F(q,P) = \int \mathrm{dq}\Big(\frac{1}{\mathrm{q}} - \frac{2\mathrm{q}}{\mathrm{q}^2+\mathrm{P}^2}\Big) = \log\mathrm{q} - \log(\mathrm{q}^2+\mathrm{P}^2) + \mathrm{c}_1(\mathrm{P}),$$

dove $c_1(P)$ è una funzione arbitraria di P. Si ha inoltre

$$Q = -\frac{qp}{P} = -\frac{q}{P}\frac{P^2-q^2}{q(q^2+P^2} = \frac{P^2-q^2}{P(q^2+P^2},$$

così che, imponendo che Q sia uguale a $\partial F/\partial P$ e ragionando come prima, si trova

$$F(q,P) = \int \mathrm{dP}\Big(\frac{1}{\mathrm{P}} - \frac{2\mathrm{P}}{\mathrm{q}^2+\mathrm{P}^2}\Big) = \log\mathrm{P} - \log(\mathrm{q}^2+\mathrm{P}^2) + \mathrm{c}_2(\mathrm{q}),$$

dove $c_2(q)$ è una funzione arbitraria di q. Infine, imponendo che le due espressioni di $F(q,P)$ coincidano, si ottiene la funzione generatrice di seconda In conclusione la soluzione assume la forma

$$q(t) = \sqrt{\frac{1+2t}{1-2t}}, \qquad p(t) = -2t\sqrt{\frac{1-2t}{1+2t}},$$