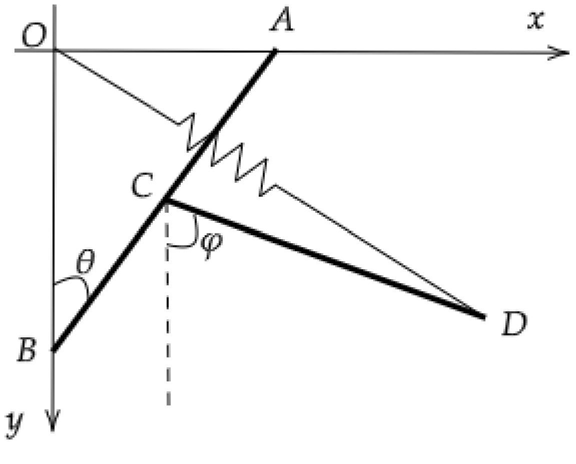
FM210 - Tutorato 12
Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Guido Gentile
Tutore: Shulamit Terracina

2 Giugno 2021

Esercizio 1 Un sistema meccanico è costituito da due sbarre uguali, rettilinee, omogenee, pesanti, di massa M e lunghezza ℓ, vincolate a muoversi su un piano verticale. La sbarra AB ha l'estremo A vincolato a scorrere sulla retta orizzontale passante per O, mentre l'estremo B è vincolato a scorrere sulla retta verticale passante per O, come descritto in figura.



La sbarra CD ha l'estremo C incernierato nel punto di mezzo della sbarra AB. Oltre alla forza gravitazionale, il sistema è soggetto a una forza elastica di costante elastica k, che agisce su D e ha centro in O.
Tutti i vincoli sono supposti ideali. Si usino come coordinate Lagrangiane gli angoli θ e φ mostrati in figura.

- Scrivere energia cinetica e potenziale del sistema

- Scrivere la Lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero Lagrange
- Riconoscere che $(\theta, \varphi, 0, 0) = (0, 0, 0, 0), (\pi, 0, 0, 0), (0, \pi, 0, 0), (\pi, \pi, 0, 0)$ sono punti di equilibrio e studiare la stabilità del punto $(0, 0, 0, 0)$ al variare di k
- [Determinare gli eventuali altri punti di equilibrio, al variare di k]
- Si consideri ora il caso in cui il sistema si muove in assenza di gravità, ovvero, si ponga l'accelerazione di gravità g uguale a 0 nelle equazioni del moto determinate sopra. Riconoscere che la Lagrangiana è invariante sotto il gruppo di trasformazioni a un parametro $g_\alpha(\theta, \varphi) = (\theta + \alpha, \varphi + \alpha)$ e calcolare la carica di Noether corrispondente.

Esercizio 2 In un piano verticale, un'asta di massa M e lunghezza ℓ ha un estremo vincolato nell'origine; l'altro estremo è collegato ad una molla di costante elastica $k > 0$, che si mantiene sempre verticale. Lungo l'asta può scorrere un punto materiale P di massa m, collegato all'origine del sistema di riferimento tramite una molla di costante elastica $k > 0$.

- Determinare la Lagrangiana del sistema
- Scrivere le equazioni di Eulero Lagrange
- Individuare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità
- Identificare l'energia generalizzata e verificarne esplicitamente la conservazione.

Esercizio 3 Un disco di massa m e $r > 0$ rotola senza strisciare lungo una guida circolare di raggio R ($R > r$) di un riferimento verticale. Il centro del disco è collegato agli assi del riferimento tramite due molle di costante elastica $k > 0$, che si mantengono sempre parallele agli assi.

- Determinare la Lagrangiana del sistema
- Scrivere le equazioni di Eulero Lagrange
- Individuare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità
- [Si supponga ora che la guida ruoti attorno all'asse verticale. Scrivere la Lagrangiana del sistema.]

Esercizio 4 Per $q > 0$ si consideri la lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{\dot{q}^2}{2q^2} - \log q$$

1. Determinare l'Hamiltoniana.
2. Determinare le equazioni di Hamilton.
3. Determinare la trasformazione canonica generata dalla funzione generatrice di seconda specie $F(q, P) = P \log q$.
4. Usare la trasformazione canonica trovata al punto precedente per integrare le equazioni del moto con dati iniziali $q(0) = 1, p(0) = 0$.

Esercizio 5 Si consideri, per $p_1, p_2 > 0$, le seguenti due trasformazioni di coordinate

$$\begin{cases} Q_1 = \sqrt{p_2} \cos q_1 \\ Q_2 = \sqrt{p_1} \cos q_2 \\ P_1 = -2\sqrt{p_2} \sin q_1 \\ P_2 = -2\sqrt{p_1} \sin q_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} Q_1 = \sqrt{p_1} \cos q_1 \\ Q_2 = \sqrt{p_2} \cos q_2 \\ P_1 = -2\sqrt{p_1} \sin q_1 \\ P_2 = -2\sqrt{p_2} \sin q_2 \end{cases}$$

- Dire quale delle due trasformazioni è canonica.
- Si trovi, per la trasformazione del punto precedente, una funzione generatrice di prima specie $F(q_1, q_2, Q_1, Q_2)$.
- Si verifichi esplicitamente che la funzione generatrice $F = F(q_1, q_2, Q_1, Q_2)$ trovata al punto precedente soddisfa la condizione che la matrice 2×2 di elementi $\dfrac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial Q_j}$ è non singolare.
- [Si discuta se sia possibile trovare una funzione generatrice di seconda specie e, in caso affermativo, la si determini.]

Ulteriori esercizi

Esercizio 1 Si consideri l'Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2} e^{-2q}$$

1. Determinare le equazioni del moto.
2. Determinare la Lagrangiana associata.

3. Determinare la trasformazione canonica generata dalla funzione generatrice di prima specie $F(q, Q) = Q^2 e^q$ e determinare la nuova Hamiltoniana.

4. Usare la trasformazione canonica trovata al punto precedente per risolvere le equazioni con dati iniziali $q(0) = 0, p(0) = 1$

Esercizio 2 si consideri la lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = q\dot{q}^2$$

1. Per quali valori di q la lagrangiana $\mathcal{L}$ è regolare?

2. Determinare l'Hamiltoniana associata e le corrispondenti equazioni di Hamilton.

3. Si dimostri che la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = \frac{p^2}{4q} \\ P = -\frac{4q^2}{3p} \end{cases}$$

   è canonica, mostrando che è la trasformazione associata alla funzione generatrice di seconda specie $G(q, P) = -\frac{4q^3}{9P}$. Su quale dominio è definita la trasformazione?. Determinare l'Hamiltoniana nelle nuove coordinate.

4. Usare la trasformazione canonica del punto precedente per risolvere le equazioni del moto con dato iniziale $q(0) = 1, \dot{q}(0) = \frac{2}{3}$

Esercizio 3

1. Data l'Hamiltoniana
$$H = \frac{\mathbf{p}}{2m} + U(\mathbf{q})$$
   con $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^6$. Si verifichi che, se $U(\mathbf{q})$ è invariante rispetto a rotazioni attorno all'asse e_3 (i.e. $U(\mathbf{q}) = V(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}, q^3)$ per un'opportuna funzione V, allora la parentesi di Poisson di H con la terza componente del momento angolare $I_3 = (\mathbf{q} \wedge \mathbf{p})_3 = q_1 p_2 - q_2 p_1$ e uguale a zero.

2. Si verifichi che $\{I_1, I_2\} = I_3, \{I_2, I_3\} = I_1, \{I_3, I_1\} = I_2$. Si dimostri quindi che se il potenziale U dell'Hamiltoniana al punto precedente è invariate per rotazioni sia attorno all'asse e_3 che attorno all'asse e_1, allora tutte e tre le componenti di $\mathbf{I} = \mathbf{q} \wedge \mathbf{p}$ sono integrali primi del moto.