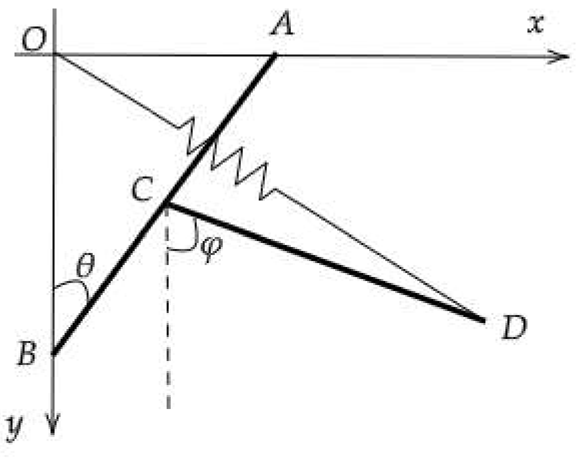
FM210 - Soluzioni Tutorato 12
Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Docente: Guido Gentile
Tutore: Shulamit Terracina

2 Giugno 2021

Attenzione: ** prima dell'esercizio significa che è quello da $+2$ che di solito sta tra le quadre (non mi funzionano le quadre)

Esercizio 1 Un sistema meccanico è costituito da due sbarre uguali, rettilinee, omogenee, pesanti, di massa M e lunghezza ℓ, vincolate a muoversi su un piano verticale. La sbarra AB ha l'estremo A vincolato a scorrere sulla retta orizzontale passante per O, mentre l'estremo B è vincolato a scorrere sulla retta verticale passante per O, come descritto in figura.



La sbarra CD ha l'estremo C incernierato nel punto di mezzo della sbarra AB. Oltre alla forza gravitazionale, il sistema è soggetto a una forza elastica di costante elastica k, che agisce su D e ha centro in O.
Tutti i vincoli sono supposti ideali. Si usino come coordinate Lagrangiane gli angoli θ e φ mostrati in figura.

- Scrivere energia cinetica e potenziale del sistema
- Scrivere la Lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero Lagrange
- Riconoscere che $(\theta, \varphi, 0, 0) = (0, 0, 0, 0), (\pi, 0, 0, 0), (0, \pi, 0, 0), (\pi, \pi, 0, 0)$ sono punti di equilibrio e studiare la stabilità del punto $(0, 0, 0, 0)$ al variare di k
- **Determinare gli eventuali altri punti di equilibrio, al variare di k
- Si consideri ora il caso in cui il sistema si muove in assenza di gravità, ovvero, si ponga l'accelerazione di gravità g uguale a 0 nelle equazioni del moto determinate sopra. Riconoscere che la Lagrangiana è invariante sotto il gruppo di trasformazioni a un parametro $g_\alpha(\theta, \varphi) = (\theta+\alpha, \varphi+\alpha)$ e calcolare la carica di Noether corrispondente.

http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/MA_2018/soluzioni_scritto_1.pdf

Esercizio 2 In un piano verticale, un'asta di massa M e lunghezza ℓ ha un estremo vincolato nell'origine; l'altro estremo è collegato ad una molla di costante elastica $k > 0$, che si mantiene sempre verticale. Lungo l'asta può scorrere un punto materiale P di massa m, collegato all'origine del sistema di riferimento tramite una molla di costante elastica $k > 0$.

- Determinare la Lagrangiana del sistema
- Scrivere le equazioni di Eulero Lagrange
- Individuare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità
- Identificare l'energia generalizzata e verificarne esplicitamente la conservazione.

Esercizio 3 Un disco di massa m e $r > 0$ rotola senza strisciare lungo una guida circolare di raggio R $(R > r)$ di un riferimento verticale. Il centro del disco è collegato agli assi del riferimento tramite due molle di costante elastica $k > 0$, che si mantengono sempre parallele agli assi.

- Determinare la Lagrangiana del sistema
- Scrivere le equazioni di Eulero Lagrange
- Individuare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità
- **Si supponga ora che la guida ruoti attorno all'asse verticale. Scrivere la Lagrangiana del sistema.

Esercizio 4 Per $q > 0$ si consideri la lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{\dot{q}^2}{2q^2} - \log q$$

1. Determinare l'Hamiltoniana.
2. Determinare le equazioni di Hamilton.
3. Determinare la trasformazione canonica generata dalla funzione generatrice di seconda specie $F(q, P) = P \log q$.
4. Usare la trasformazione canonica trovata al punto precedente per integrare le equazioni del moto con dati iniziali $q(0) = 1, p(0) = 0$.

Soluzione

1. Abbiamo $p = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\dot{q}}{q^2}$ da cui otteniamo $\dot{q} = pq^2$ e quindi

$$H(q, p) = \frac{p^2 q^2}{2} + \log q$$

2. Le equazioni di Hamilton sono:

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = pq^2 \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = -pq^2 - \frac{1}{q} \end{cases}$$

3. La trasformazione canonica generata da F e data da $\begin{cases} p = \dfrac{\partial F}{\partial q} = \frac{P}{q} \\ Q = \dfrac{\partial F}{\partial P} = \log q \end{cases}$

   da cui otteniamo la trasformazione

$$P(p, q) = pq, \qquad Q(p, q) = \log q$$

4. La nuova Hamiltoniana è data da $\tilde{H}(P, Q) = \frac{P^2}{2} + Q$ e le nuove equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} \dot{Q} = \dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = P \\ \dot{P} = -\dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = -1 \end{cases}$$

   da cui otteniamo

$$P(t) = P(0) - t \qquad Q(t) = Q(0) + P(0)t - \frac{t^2}{2}$$

   con dati iniziali $Q(0) = \log 1 = 0, P(0) = 0$ da cui otteniamo

$$q(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, p(t) = -te^{\frac{t^2}{2}}$$

Esercizio 5 Si consideri, per $p_1, p_2 > 0$, le seguenti due trasformazioni di coordinate

$$\begin{cases} Q_1 = \sqrt{p_2}\cos q_1 \\ Q_2 = \sqrt{p_1}\cos q_2 \\ P_1 = -2\sqrt{p_2}\sin q_1 \\ P_2 = -2\sqrt{p_1}\sin q_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} Q_1 = \sqrt{p_1}\cos q_1 \\ Q_2 = \sqrt{p_2}\cos q_2 \\ P_1 = -2\sqrt{p_1}\sin q_1 \\ P_2 = -2\sqrt{p_2}\sin q_2 \end{cases}$$

- Dire quale delle due trasformazioni è canonica.
- Si trovi, per la trasformazione del punto precedente, una funzione generatrice di prima specie $F(q_1, q_2, Q_1, Q_2)$.
- Si verifichi esplicitamente che la funzione generatrice $F = F(q_1, q_2, Q_1, Q_2)$ trovata al punto precedente soddisfa la condizione che la matrice 2×2 di elementi $\dfrac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial Q_j}$ è non singolare.
- [Si discuta se sia possibile trovare una funzione generatrice di seconda specie e, in caso affermativo, la si determini.]

Ulteriori esercizi

Esercizio 1 Si consideri l'Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2}e^{-2q}$$

1. Determinare le equazioni del moto.
2. Determinare la Lagrangiana associata.
3. Determinare la trasformazione canonica generata dalla funzione generatrice di prima specie $F(q, Q) = Q^2 e^q$ e determinare la nuova Hamiltoniana.
4. Usare la trasformazione canonica trovata al punto precedente per risolvere le equazioni con dati iniziali $q(0) = 0, p(0) = 1$

Soluzione

1. Le equazioni di Hamilton sono:

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = pe^{-2q} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = -p^2 e^{-2q} \end{cases}$$

2. Dalla prima equazione di Hamilton, abbiamo che $p = \dot{q}e^{2q}$, la Lagrangiana associata all'Hamiltoniana assegnata è

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \sup_p \{p\dot{q} - H(q,p)\} = \left[p\dot{q} - H(q,p) \right] \Big|_{p=\dot{q}e^{2q}} = \frac{1}{2}\dot{q}e^{2q}$$

3. La trasformazione canonica generata da F è

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial F}{\partial q} = Q^2 e^q \\ P = -\dfrac{\partial F}{\partial Q} = -2Qe^q \end{cases}$$

che si può invertire in

$$\begin{cases} Q = \sqrt{p}e^{-\frac{q}{2}} \\ P = -2\sqrt{p}e^{\frac{q}{2}} \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} q = \log(-\frac{P}{2Q}) \\ p = -\frac{1}{2}QP \end{cases}$$

Si noti che la trasformazione cos'ı determinata mappa in modo invertibile $(q, p) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ in $(Q, P) \in (0, +\infty) \times (-\infty, 0)$. L'Hamiltoniana nelle nuove coordinate è

$$\tilde{H}(Q, P) = \frac{1}{2}Q^4$$

4. Le equazioni di Hamilton nelle nuove coordinate sono semplicemente

$$\begin{cases} \dot{Q} = \dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = 0 \\ \dot{P} = -\dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = -2Q^3 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$Q(t) = Q(0) \qquad P(t) = P(0) - 2[Q(0)]^3 t$$

I dati iniziali $q(0) = 0, p(0) = 1$ corrispondono, nelle nuove variabili, a $Q(0) = 1, P(0) = -2$.

La soluzione desiderata nelle nuove variabili è, quindi,

$$Q(t) = 1, \quad P(t) = -2(t + 1)$$

Riusando il cambio di variabili, otteniamo la soluzione desiderata nelle coordinate originali

$$q(t) = \log(t + 1), p(t) = (t + 1)$$

che è definita per $t > -1$.

Esercizio 2 si consideri la lagrangiana

$$\mathcal{L}(q,\dot q) = q\dot q^2$$

1. Per quali valori di q la lagrangiana $\mathcal{L}$ è regolare?
2. Determinare l'Hamiltoniana associata e le corrispondenti equazioni di Hamilton.
3. Si dimostri che la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = \frac{p^2}{4q} \\ P = -\frac{4q^2}{3p} \end{cases}$$

   è canonica, mostrando che è la trasformazione associata alla funzione generatrice di seconda specie $G(q,P) = -\frac{4q^3}{9P}$. Su quale dominio è definita la trasformazione?. Determinare l'Hamiltoniana nelle nuove coordinate.
4. Usare la trasformazione canonica del punto precedente per risolvere le equazioni del moto con dato iniziale $q(0) = 1, \dot q(0) = \frac{2}{3}$

Soluzione

1. $p = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q} = 2q\dot q$, quindi, se $q \neq 0$, $\dot q = \frac{p}{2q}$. La Lagrangiana è regolare su ogni intervallo non contenente $q = 0$
2. L'Hamiltoniana è

$$H(q,\dot q) = \sup_{\dot q}\{p\dot q - \mathcal{L}(q,\dot q)\} = \left[p\dot q - H(q,p)\right]\Big|_{\dot q = \frac{p}{2q}} = \frac{p^2}{4q}$$

   Le corrispondenti equazioni di Hamilton sono

$$\begin{cases} \dot q = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{2q} \\ \dot p = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = \frac{p^2}{4q^2} \end{cases}$$

3. La trasformazione assegnata è definita per $q \neq 0$ e $p \neq =$ e mappa in modo invertibile $\{q>0, p>0\}$ in $\{Q>0, P<0\}$, $\{q>0, p<0\}$ in $\{Q>0, P>0\}$, $\{q<0, p>0\}$ in $\{Q<0, P<0\}$ e $\{q<0, p<0\}$ in $\{Q<0, P>0\}$. Consideriamo il caso $\{q>0, p>0\} \leftrightarrow \{Q>0, P<0\}$ (gli altri casi si trattano analogamente). Su tale dominio, la trasformazione inversa di quella assegnata è

$$\begin{cases} q = (\frac{9}{4}QP^2)^{1/3} \\ p = (-12Q^2P^2)^{1/3} \end{cases}$$

Per dimostrare che ‘e canonica, cerco una funzione generatrice di seconda specie $G(q,P)$ tale che

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial G}{\partial q}(q,P) = -\frac{4q^2}{3P} \\ Q = \dfrac{\partial G}{\partial P}(q,P) = \frac{1}{4q}(-\frac{4q^2}{3P})^2 = \frac{4q^3}{9P^2} \end{cases}$$

che è risolta da $G(q,P) = -\frac{4q^3}{9P}$, e dimostra che la trasformazione è canonica.

Nelle nuove coordinate, l'Hamiltoniana è $\tilde{H}(Q,P) = Q$ le cui equazioni di Hamilton sono

$$\begin{cases} \dot{Q} = 0 \\ \dot{P} = -1 \end{cases}$$

4. Integrando le equazioni precedenti, otteniamo

$$\begin{cases} Q(t) = Q(0) \\ P(t) = P(0) - t \end{cases}$$

ovvero, imponendo le condizioni iniziali

$$\begin{cases} Q(t) = \frac{4}{9} \\ P(t) = -(1+t) \end{cases}$$

nelle coordinate (q,p) la soluzione è

$$\begin{cases} q(t) = (1+t)^{\frac{2}{3}} \\ P(t) = \frac{4}{3}(1+t)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

che è definita per $t > -1$

Esercizio 3

1. Data l'Hamiltoniana
$$H = \frac{\mathbf{p}}{2m} + U(\mathbf{q})$$
con $(\mathbf{q},\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^6$. Si verifichi che, se $U(\mathbf{q})$ è invariante rispetto a rotazioni attorno all'asse e_3 (i.e. $U(\mathbf{q}) = V(\sqrt{q_1^2+q_2^2}, q^3)$ per un'opportuna funzione V, allora la parentesi di Poisson di H con la terza componente del momento angolare $I_3 = (\mathbf{q} \wedge \mathbf{p})_3 = q_1p_2 - q_2p_1$ e uguale a zero.

2. Si verifichi che $\{I_1, I_2\} = I_3, \{I_2, I_3\} = I_1, \{I_3, I_1\} = I_2$. Si dimostri quindi che se il potenziale U dell'Hamiltoniana al punto precedente è invariate per rotazioni sia attorno all'asse e_3 che attorno all'asse e_1, allora tutte e tre le componenti di $\mathbf{I} = \mathbf{q} \wedge \mathbf{p}$ sono integrali primi del moto.

Soluzione

1. Definiamo $\rho(q_1, q_2) = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$, e ricordiamo che $I = \begin{pmatrix} q_2p_3 - q_3p_2 \\ q_3p_1 - q_1p_3 \\ q_1p_2 - q_2p_1 \end{pmatrix}$.

   Gli ingredienti necessari per il calcolo di $\{H, I_3\}$ sono:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial \rho} \frac{q_1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}} \\ \frac{\partial V}{\partial \rho} \frac{q_2}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}} \\ \frac{\partial V}{\partial q_3} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \frac{p_1}{m} \\ \frac{p_2}{m} \\ \frac{p_3}{m} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{q}} = \begin{pmatrix} p_2 \\ -p_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{p}} = \begin{pmatrix} -q_2 \\ q_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Quindi

$$\{H, I_3\} = \frac{\partial V}{\partial \rho}\left[-\frac{q_1q_2}{\rho} + \frac{q_2q_1}{\rho}\right] - \left[\frac{p_1p_2}{m} + \frac{p_2p_1}{m}\right] = 0$$

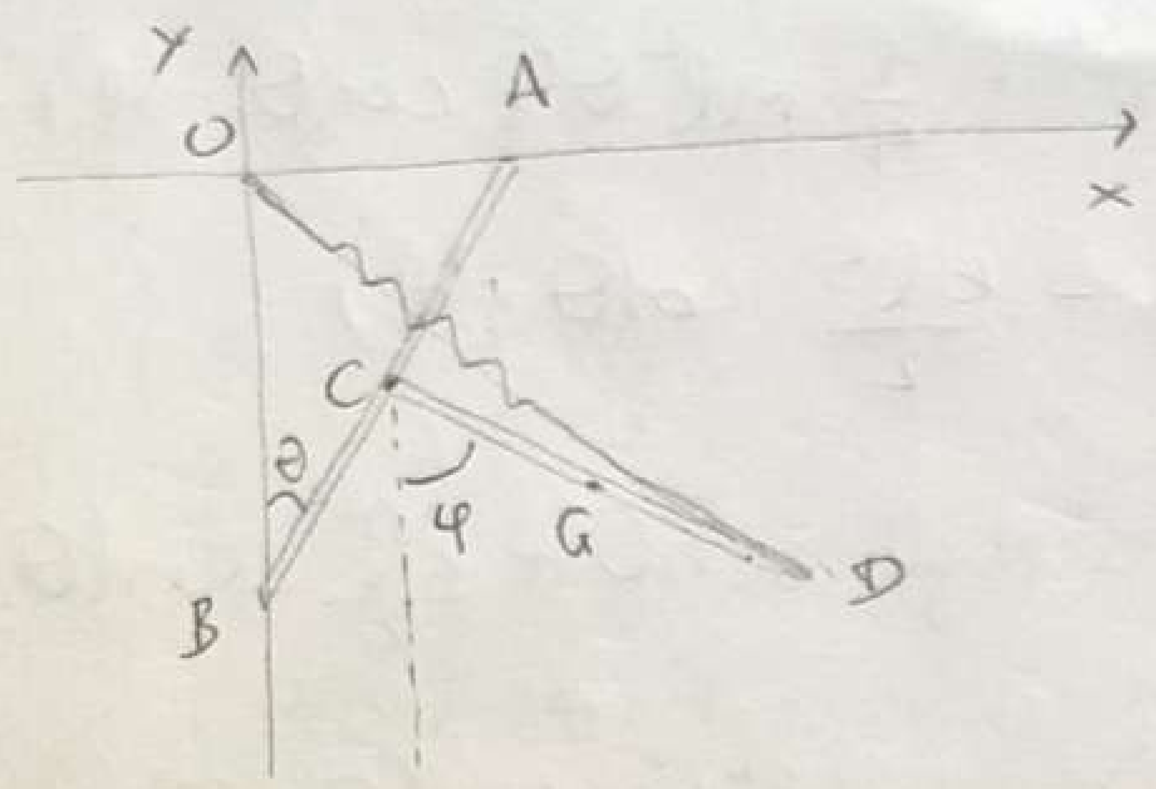
2. Osserviamo che

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{q}} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_3 \\ -p_2 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{p}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -q_3 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{q}} = \begin{pmatrix} -p_3 \\ 0 \\ p_1 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{p}} = \begin{pmatrix} q_3 \\ 0 \\ -q_1 \end{pmatrix}$$

   (le derivate della terza componente sono gi'a state calcolate al punto 1). Quindi

$$\begin{aligned} \{I_1, I_2\} &= q_1p_2 - q_2p_1 = I_3 \\ \{I_2, I_3\} &= q_2p_3 - q_3p_2 = I_1 \\ \{I_3, I_1\} &= q_3p_1 - q_1p_3 = I_2 \end{aligned}$$

   Come visto al punto 1, se il potenziale è invariante per rotazioni attorno all'asse e_3, $\{H, I_3\} = 0$. Quindi, con un ragionamento analogo concludiamo che se il potenziale è invariante anche per rotazioni attorno all'asse e_1, $\{H, I_1\} = 0$. Ma allora, se $\{H, I_3\} = 0$ e $\{H, I_1\} = 0$ allora $\{H, \{I_3, I_1\}\} = 0$ cioè $\{H, I_2\} = 0$.



$A = (\ell \,\mathrm{sen}\theta, 0)$

$B = (0, -\ell\cos\theta)$

$C = \left(\frac{\ell}{2}\,\mathrm{sen}\theta, -\frac{\ell}{2}\cos\theta\right)$

$G\left(\frac{\ell}{2}\,\mathrm{sen}\theta + \frac{\ell}{2}\,\mathrm{sen}\varphi,\ -\frac{\ell}{2}\cos\theta - \frac{\ell}{2}\cos\varphi\right)$

$D = \left(\frac{\ell}{2}\,\mathrm{sen}\theta + \ell\,\mathrm{sen}\varphi, -\frac{\ell}{2}\cos\theta - \ell\cos\varphi\right)$

$I = \frac{M\ell^2}{12}.$

$T = T_{cin,C} + T_{cin,G} + \frac{1}{2} I\dot\theta^2 + \frac{1}{2} I\dot\varphi^2$

$\dot C = \frac{\ell\dot\theta}{2}(\cos\theta, \mathrm{sen}\theta)$ $\quad \dot G = \frac{\ell}{2}(\dot\theta\cos\theta + \dot\varphi\cos\varphi, \dot\theta\,\mathrm{sen}\theta + \dot\varphi\,\mathrm{sen}\varphi)$

$|\dot C|^2 = \frac{\ell^2\dot\theta^2}{4}$ $\quad |\dot G|^2 = \frac{\ell^2}{4}(2\dot\theta\dot\varphi\cos\theta\cos\varphi + 2\dot\theta\dot\varphi\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi + \dot\theta^2 + \dot\varphi^2)$

$= \frac{\ell^2\dot\theta\dot\varphi}{2}\cos(\theta-\varphi) + \frac{\ell^2}{4}(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2)$

$$T = \frac{M\ell^2\dot\theta}{8} + \frac{M\ell^2\dot\theta\dot\varphi}{4}\cos(\theta-\varphi) + \frac{M\ell^2}{8}(\dot\theta^2+\dot\varphi^2) + \frac{M\ell^2}{24}(\dot\theta^2+\dot\varphi^2) =$$

$$= \frac{7}{24}M\ell^2\dot\theta^2 + \frac{1}{6}M\ell^2\dot\varphi^2 + \frac{M\ell^2}{4}\dot\theta\dot\varphi\cos(\theta-\varphi)$$

$U = U_{pot,C} + U_{pot,G} + U_{el,D}$

$\overline{OD}^2 = \frac{\ell^2}{4} + \ell^2 + \ell^2\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi + \ell^2\cos\theta\cos\varphi =$

$= \frac{5}{4}\ell^2 + \ell^2\cos(\theta-\varphi)$

$$U = Mg\left(-\frac{\ell}{2}\cos\theta - \frac{\ell}{2}\cos\theta - \frac{\ell}{2}\cos\varphi\right) + \frac{k\ell^2}{2}\cos(\theta-\varphi) + \mathrm{cost}$$

$$= Mg\ell\left(-\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\varphi\right) + \frac{k\ell^2}{2}\cos(\theta-\varphi) + \mathrm{cost}$$

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{7}{24} M\ell^2\dot\theta^2 + \frac{1}{6} M\ell^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{4} M\ell^2\dot\theta\dot\varphi\cos(\theta-\varphi) +$$

$$+ M\ell g\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\cos\varphi\right) - \frac{k\ell^2}{2}\cos(\theta-\varphi)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -\frac{1}{4} M\ell^2\dot\theta\dot\varphi\,\mathrm{sen}(\theta-\varphi) - Mg\ell\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{k\ell^2}{2}\mathrm{sen}(\theta-\varphi)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{7}{\cancel{24}_{12}}\cancel{2}\, M\ell^2\dot\theta + \frac{1}{4}M\ell^2\dot\varphi\cos(\theta-\varphi)\right) =$$

$$= \frac{7}{12} M\ell^2\ddot\theta + \frac{1}{4}M\ell^2\ddot\varphi\cos(\theta-\varphi) - \frac{1}{4}M\ell^2\dot\varphi\dot\theta\,\mathrm{sen}(\theta-\varphi)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \frac{1}{4}M\ell^2\dot\theta\dot\varphi\,\mathrm{sen}(\theta-\varphi) - \frac{1}{2}Mg\ell\,\mathrm{sen}\,\varphi - \frac{k\ell^2}{2}\mathrm{sen}(\theta-\varphi)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}M\ell^2\dot\varphi + \frac{1}{4}M\ell^2\dot\theta\cos(\theta-\varphi)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}M\ell^2\ddot\varphi + \frac{1}{4}M\ell^2\ddot\theta\cos(\theta-\varphi) + \frac{1}{4}M\ell^2\dot\theta\dot\varphi\,\mathrm{sen}(\theta-\varphi)$$

- $(\theta, \varphi, 0, 0) = (0,0,0,0)$, $(\pi,0,0,0)$, $(0,\pi,0,0)$, $(\pi,\pi,0,0)$ sono pde
- stabilità di $(0,0,0,0)$ al variare di k.

[FAC stab degli altri al variare di k].

Se $(\theta_0, \varphi_0, 0, 0)$ di eq allora le E-L diventano

$$\begin{cases} 0 = -Mgl \operatorname{sen}\theta + \frac{kl^2}{2} \operatorname{sen}(\theta-\varphi) \\ 0 = -\frac{1}{2} Mgl \operatorname{sen}\varphi - \frac{kl^2}{2} \operatorname{sen}(\theta-\varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Mgl \operatorname{sen}\theta = \frac{kl^2}{2} \operatorname{sen}(\theta-\varphi) \\ Mgl \operatorname{sen}\varphi = -kl^2 \operatorname{sen}(\theta-\varphi) \end{cases}$$

Tutti i pti elencati verificano queste eq.ni.

$$U_\theta = Mgl \operatorname{sen}\theta - \frac{kl^2}{2} \operatorname{sen}(\theta-\varphi)$$

$$U_{\theta\theta} = Mgl \cos\theta - \frac{kl^2}{2} \cos(\theta-\varphi)$$

$$U_\varphi = \frac{1}{2} Mgl \operatorname{sen}\varphi + \frac{kl^2}{2} \operatorname{sen}(\theta-\varphi)$$

$$U_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} Mgl \cos\varphi - \frac{kl^2}{2} \cos(\theta-\varphi)$$

$$U_{\theta\varphi} = +\frac{kl^2}{2} \cancel{\operatorname{sen}}\cos(\theta-\varphi)$$

$$U_{\theta\theta}\big|_{(\theta,\varphi)=(0,0)} = Mgl - \frac{kl^2}{2}$$

$$U_{\varphi\varphi}\big|_{(\theta,\varphi)=(0,0)} = \frac{1}{2} Mgl - k\frac{l^2}{2}$$

$$U_{\theta\varphi}\big|_{(\theta,\varphi)=(0,0)} = \frac{kl^2}{2}$$

$$\mathcal{H}(0,0) = \begin{pmatrix} \cancel{kl^2} Mgl - \frac{kl^2}{2} & \frac{kl^2}{2} \\ \frac{kl^2}{2} & \frac{1}{2} Mgl - \frac{kl^2}{2} \end{pmatrix} =$$

$\alpha = \frac{Mg}{kl}$

$$= \frac{kl^2}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 2\alpha - 1 & 1 \\ 1 & \alpha - 1 \end{pmatrix}}_{H}$$

Gli autovalori di H sono

$$\lambda_\pm = \frac{3}{2}\alpha - 1 \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + 1}$$

autovalori $\exists\ \forall$ val di α.

$\cancel{(2\alpha-1)(\alpha-1)t^2 + 1 = 0}$

$(2\alpha - 1 - t)(\alpha - 1 - t) - 1 = 0$

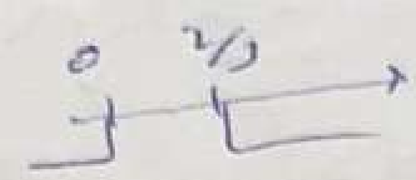
$t^2 - (2\alpha - 1 + \alpha - 1)t + (2\alpha-1)(\alpha-1) - 1 = 0$

$t^2 - (3\alpha - 2)t + (2\alpha^2 - 3\alpha) = 0$

$b^2 - 4ac = 9\alpha^2 + 4 - \cancel{12\alpha} - 8\alpha^2 + \cancel{12\alpha}$

sono entrambi positivi se

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\alpha > 1 \\ \left(\frac{3}{2}\alpha - 1\right)^2 > \frac{\alpha^2}{4} + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha > 2/3 \\ \frac{9}{4}\alpha^2 - 3\alpha + \cancel{1} > \frac{\alpha^2}{4} + \cancel{1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha > 2/3 \\ 2\alpha^2 - 3\alpha > 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \alpha > 2/3 \\ \alpha < 0 \ \vee \alpha > 2/3 \end{cases} \qquad \boxed{\alpha > 2/3}$$

$$\frac{Mg}{k\ell} > 2/3$$

$$\frac{3}{2}\frac{Mg}{\ell} > k\ell$$

se $k < \frac{3}{2}\frac{Mg}{\ell} \Longrightarrow (0,0)$ STAB.

se $k < \frac{3}{2}\frac{Mg}{\ell} \Longrightarrow (0,0)$ INST.

$g = 0$ No gravità.

$g_\alpha(\theta,\varphi) = (\theta+\alpha, \varphi+\alpha) \qquad \dot{g}_\alpha = (\dot\theta, \dot\varphi)$

$$\mathcal{L} = \frac{7}{24}M\ell^2\dot\theta^2 + \frac{1}{6}M\ell^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{4}M\ell^2\dot\theta\dot\varphi\cos(\theta-\varphi) - \frac{k\ell^2}{2}\cos(\theta-\varphi)$$

$\tilde\theta - \tilde\varphi = \theta + \alpha - \varphi - \alpha = \theta - \varphi$

Poichè $\dot{g} = (\dot\theta, \dot\varphi)$ e

$\longrightarrow \mathcal{L}$ è invariante sotto g_α.

$\cancel{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0}} \qquad \frac{\partial g}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0} = (1, 1) \qquad \dot{q} = (\dot\theta, \dot\varphi)$

$$I = \frac{\partial g}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} = 1 \cdot \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} + 1 \cdot \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi}$$

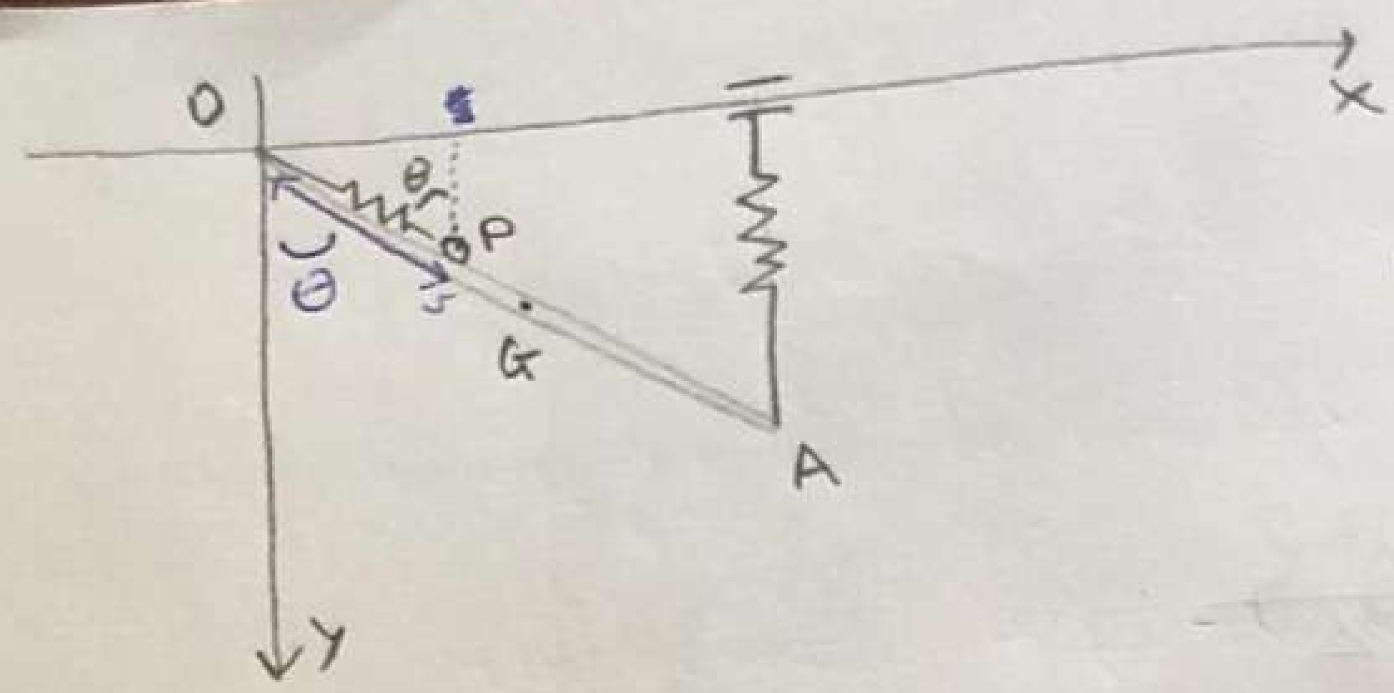
$$\boxed{I = \frac{7}{12}M\ell^2\dot\theta^2 + \frac{M\ell^2(\dot\varphi^2+\dot\theta^2)}{4}\cos(\theta-\varphi) + \cancel{\frac{7}{12}}\frac{1}{3}M\ell^2\dot\varphi^2}$$

QUINDI
- LAGR E EUL. LAG
- NOETHER
- Pde

[(0,0) stab].

$\boxed{30'}$

(Non do di segno) ③



$G = \left(\frac{\ell}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta ,\ \frac{\ell}{2}\cos\theta\right)$

$P\left(s\,\mathrm{sen}\,\theta,\ s\cos\theta\right)$

$A = \left(\ell\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \ell\cos\theta\right)$

$\dot G = \frac{\ell}{2}\dot\theta(\cos\theta, -\mathrm{sen}\,\theta) \longrightarrow |\dot G|^2 = \frac{\ell^2\dot\theta^2}{4}$

$\dot P = \left(\dot s\,\mathrm{sen}\,\theta + s\dot\theta\cos\theta,\ \dot s\cos\theta - s\dot\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$

$|\dot P|^2 = \dot s^2 + \dot\theta^2 s^2$

$\mathcal{L} = \cancel{\frac{1}{2}\frac{M\ell^2\dot\theta^2}{4}} + \frac{1}{2}\frac{M\ell^2}{3}\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m(\dot s^2 + \dot\theta^2 s^2) + \quad \longrightarrow \frac{1}{6}M\ell^2\dot\theta^2$

(König + H-S)

$- Mg\frac{\ell}{2}\cos\theta - \frac{k}{2}s^2 - \frac{k}{2}\ell^2\cos^2\theta - mgs\cos\theta$

$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = \frac{Mg\ell}{2}\mathrm{sen}\,\theta + \frac{k}{2}\ell^2\,\mathrm{sen}(2\theta) + mgs\,\mathrm{sen}\,\theta$

$\cancel{\begin{cases}\left(\frac{Mg\ell}{2} + \frac{k}{2}\ell\cos\theta\right)\mathrm{sen}\,\theta = 0 \\ ks = \phi\end{cases}}$

$\cancel{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}\right) = \frac{d}{dt}}$

$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s} = ks - mg\cos\theta \quad \begin{cases} s = 0 \\ -\mathrm{sen}\,\theta = 0 \to \theta = 0 \\ \cancel{Mg + k\ell\cos\theta = \phi}\end{cases}$

$$\boxed{\begin{cases}\left(\frac{Mg\ell}{2} + \frac{k}{2}\ell^2\cos\theta + mgs\right)\mathrm{sen}\,\theta = 0 \\ ks = +mg\cos\theta\end{cases}}$$

$\theta = 0 \longrightarrow \quad ks = -mg \longrightarrow s = -\frac{mg}{k} \qquad \left(0;\ +\frac{mg}{k}\right)$

$\theta = \pi \longrightarrow \quad \left(\pi, -\frac{mg}{k}\right)$

$$\cos\theta = \frac{k s}{mg}$$

$$\frac{Mg\ell}{2} + \frac{k^2\ell^2 s}{mg} + mg s = 0$$

$$(k^2\ell^2 + m^2 g^2) s = -\frac{Mmg^2\ell}{2}$$

$$s = \frac{-Mmg^2\ell}{2(k^2\ell^2 + m^2g^2)}$$

$$\cos\theta = \frac{-Mg\ell k}{2(k^2\ell^2 + m^2g^2)} =$$

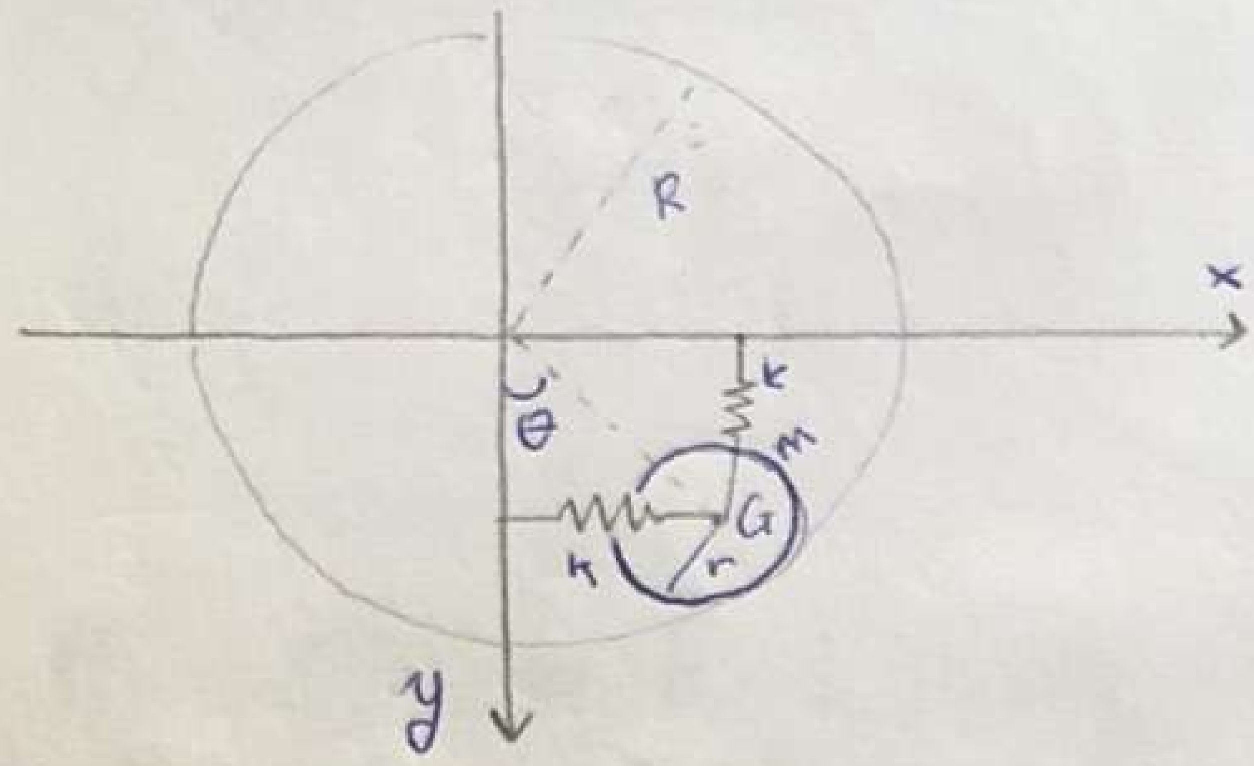
$$\theta_\pm = \pm \arccos\left(\frac{Mg\ell k}{2(k^2\ell^2 + m^2g^2)}\right)$$

$$\boxed{\left(\theta_\pm ; \frac{mg}{k}\cos(\theta_\pm)\right)}$$

∃ se e solo se

$$\left|\frac{Mg\ell k}{2(k^2\ell^2 + m^2g^2)}\right| < 1.$$

$U_{\theta\theta}|_{\theta=\pi} < 0$ (INSTAB $\cancel{-k(k \ldots)\cos(2\theta)}$



velocità angolare del disco

$$\omega = \frac{R-r}{r}\dot{\theta}$$

$$G\big((R-r)\operatorname{sen}\theta,\ (R-r)\cos\theta\big)$$

$$I = \frac{1}{2} m r^2 + m\left(R-r\right)^2$$

$$T = \frac{1}{4} m \cancel{r^2} \frac{(R-r)^2}{\cancel{r^2}}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (R-r)\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2$$

$$U = mg(R-r)\cos\theta + \frac{k}{2}(R-r)^2 \operatorname{sen}^2\theta + \frac{k}{2}(R-r)^2\cos^2\theta$$

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{3}{4} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2 - mg(R-r)\cos\theta + \cancel{\frac{k}{2}(R-r)^2}_{\text{cost.}}$$

~~Supponi non ci sia gravità, trova una~~ grandezza conservata.

$$\cancel{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0}$$

$$\cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{3}{2} m (R-r)^2 \dot{\theta} = A}$$

$$\cancel{\dot{\theta} = \frac{A(R-r)^2}{3m}}$$

$$\cancel{\tilde{\mathcal{L}} = \frac{3}{4} m (R-r)^2 \frac{A^2 (r-R)^2}{9m^2} - \frac{A^2 (R-r)^2}{3m^3}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = mg(R-r)\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2} m (R-r)\dot{\theta}\right) = \frac{3}{2} m (R-r)\ddot{\theta}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{2g}{3d}\operatorname{sen}\theta}$$

$\theta = 0, \pi$.

$$U_\theta = +mg(R-r)\operatorname{sen}\theta + \cancel{k(R-r)^2\cos(2\theta)} - \cancel{k(R-r)^2 \operatorname{sen}(2\theta)}$$

$$U_{\theta\theta} = +mg(R-r)\cos\theta \cancel{- k(R-r)^2 \operatorname{sen}(2\theta)} \cancel{- k(R-r)^2\cos(2\theta)}$$

$U_{\theta\theta}|_{\theta=0} = +mg(R-r) > 0$ min (STAB)

$U_{\theta\theta}|_{\theta=\pi} = < 0$ (INSTAB)

$$\begin{cases} Q_1 = \sqrt{p_1}\cos q_1 \\ Q_2 = \sqrt{p_2}\cos q_2 \\ P_1 = -2\sqrt{p_1}\,\mathrm{sen}\,q_1 \\ P_2 = -2\sqrt{p_2}\,\mathrm{sen}\,q_2 \end{cases}$$

$$\cancel{\{Q_i, P_i\} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\frac{\partial P_i}{\partial p_j} - \partial Q}$$

$$\{Q_1, P_1\} = \frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial P_1}{\partial p_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_1}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial p_2} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_2}\frac{\partial P_1}{\partial q_2}$$

$$= \cancel{+\sqrt{p_1}\,\mathrm{sen}\,q_1 \cdot \sqrt{p_1}\cos q_1 - \frac{1}{2\sqrt{p_1}}\cos q_1}$$

$$= +\sqrt{p_1}\,\mathrm{sen}\,q_1 \frac{1}{\sqrt{p_1}}\mathrm{sen}\,q_1 + \frac{1}{2\sqrt{p_1}}\cos q_1\, 2\sqrt{p_1}\cos q_1 = 1$$

$$\{Q_2, P_2\} = \mathrm{sen}^2 q_2 + \cos^2 q_2 = 1.$$

$$\{Q_1, Q_2\} = \frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\underbrace{\frac{\partial Q_2}{\partial p_1}}_{=0} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_1}\underbrace{\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}}_{=0}\cdot\frac{\partial Q_2}{\partial p_2} - \underbrace{\frac{\partial Q_1}{\partial p_2}}_{=0}\frac{\partial Q_2}{\partial q_2}$$

$$= \cancel{-\sqrt{p_1}\,\mathrm{sen}\,q_1 \cdot 0 -} = 0.$$

Vabbè abbastanza evidente anche $\{P_1, P_2\}$.

$$\{Q_1, P_2\} = \frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\underbrace{\frac{\partial P_2}{\partial p_1}}_{=0} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_1}\underbrace{\frac{\partial P_2}{\partial q_1}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}}_{=0}\frac{\partial P_2}{\partial p_2} - \underbrace{\frac{\partial Q_1}{\partial p_2}}_{=0}\frac{\partial P_2}{\partial q_2} = 0.$$

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{Q_1^2}{\cos^2 q_1} \\ p_2 = \dfrac{Q_2^2}{\cos^2 q_2} \\ P_1 = -2Q_1 \tan q_1 \\ P_2 = -2Q_2 \tan q_2 \end{cases}$$

$F(q_1, q_2, Q_1, Q_2)$

$$p_1 = \frac{\partial F}{\partial q_1} \to F = \int p_1 \, dq_1 = Q_1^2 \tan q_1 + c_1(q_2, Q_1, Q_2)$$

$$\cancel{p_2 = \frac{\partial F}{\partial q_2}} \to F \Rightarrow p_2 = \frac{\partial F}{\partial q_2} = \frac{\partial c_1}{\partial q_2}$$

$$p_2 = \frac{Q_2^2}{\cos^2 q_2}$$

$$\longrightarrow c_1 = \int \frac{Q_2^2}{\cos q_2} \, dq_2 = \frac{Q_2^2}{\cancel{\cos}} \tan q_2 + C_2(Q_1, Q_2)$$

$$F = Q_1^2 \tan q_1 + Q_2^2 \tan q_2 + C_2(Q_1, Q_2)$$

$$P_1 = -\frac{\partial F}{\partial Q_1} = -2Q_1 \tan q_1 + \frac{\partial C_2}{\partial Q_1}$$

$$P_1 = -2Q_1 \tan q_1$$

$\Longrightarrow C_2$ è costante in Q_1.

$$F = Q_1^2 \tan q_1 + Q_2^2 \tan q_2 + C_3(Q_2)$$

$$P_2 = -\frac{\partial F}{\partial Q_2} = -2Q_2 \tan q_2 + \frac{\partial C_3}{\partial Q_2}$$

$$P_2 = -2Q_2 \tan q_2$$

$\longrightarrow C_3$ costante in C_3.

$\Longrightarrow C_3$ è cost $\Rightarrow C_3 \equiv 0$.

$$\boxed{F = Q_1^2 \tan q_1 + Q_2^2 \tan q_2}$$