

# FM410 Complementi di Meccanica Analitica

A.A. 2020/2021

Guido Gentile

(Programma definitivo)

## 1. Equazioni differenziali ordinarie: richiami e complementi

Richiami sulle equazioni differenziali lineari omogenee e non omogenee. Oscillatore armonico smorzato e forzato. Risonanze. Risonanza parametrica. Moti multiperiodici per l'oscillatore armonico forzato in assenza di dissipazione.

## 2. Analisi qualitativa e stabilità

Stabilità secondo Ljapunov. Punti di equilibrio stabili, instabili, attrattivi, asintoticamente stabili. Stabilità di un punto d'equilibrio nel caso in cui la matrice del sistema linearizzato abbia tutti gli autovalori con parte reale strettamente negativa (dimostrazione nel caso diagonalizzabile e semisemplice). Instabilità di un punto d'equilibrio nel caso in cui la matrice del sistema linearizzato abbia almeno un autovalore con parte reale strettamente positiva (solo enunciato). Insiemi limite: definizione e propriet. Teoremi sugli insiemi limite. Teorema di Ljapunov. Teorema di Barbašin-Krasovskij (o di LaSalle) e sua applicazione all'oscillatore armonico e al pendolo semplice. Teorema di Dirichlet-Lagrange per sistemi meccanici conservativi. Cicli limite. Sistemi planari: teorema di Poincaré-Bendixson.

## 3. Alcuni sistemi dinamici planari notevoli

Sistemi planari che ammettono una costante del moto: studio delle curve di livello e delle traiettorie nel piano delle fasi. Assenza di punti di equilibrio asintoticamente stabili e di cicli limiti in sistemi con una costante del moto. Sistemi predatore-preda ed equazioni di Lotka-Volterra: studio del sistema e dimostrazione delle leggi di Volterra. Sistemi gradiente: proprietà generali e studio delle traiettorie nel piano delle fasi. Sistemi dissipativi: studio qualitativo del pendolo con attrito. Equazione di Van Der Pol: studio qualitativo e determinazione del ciclo limite globalmente attrattivo.

## 4. Modelli epidemiologici

Modelli compartimentali: suscettibili, infetti, rimossi e deceduti. Modello SIR epidemico: analisi qualitativa e determinazione dei punti di equilibrio. Modello SIRD epidemico: analisi qualitativa e determinazione dei punti di equilibrio. Modello SIR endemico: analisi qualitativa, determinazione dei punti di equilibrio e studio del bacino di attrazione dei punti di equilibrio asintoticamente stabili. Modello SEIR endemico: analisi qualitativa e determinazione dei punti di equilibrio e studio del bacino di attrazione dei punti di equilibrio asintoticamente stabili.

## 5. Sistemi rigidi: equazioni di Eulero e trottola di Lagrange

Richiami sulle equazioni cardinali e sull'operatore di inerzia: momenti principali di inerzia e assi di inerzia. Equazioni di Eulero per un sistema rigido con un punto fisso non sottoposto a forze: studio del moto del momento angolare. Angoli di Eulero. Integrabilità di un sistema rigido con un punto fisso non sottoposto a forze. Trottola di Lagrange e trottola pesante. Energia cinetica ed energia potenziale della trottola di Lagrange in termini degli angoli di Eulero. Integrali primi ed energia potenziale efficace. Studio del sistema ridotto al variare dei parametri del sistema: casi 1, 2, 3 e 4. Pendolo sferico. Trottola di Lagrange in assenza di forze. Trottola addormentata e trottola veloce.

## 6. Variabili cicliche e teorema di Noether

Teorema della scatola di flusso. Richiami sui gruppi a un parametro di diffeomorfismi, campi vettoriali e momenti. Gruppi di simmetrie e teorema di Noether nel caso di una lagrangiana che ammetta un gruppo di simmetrie. Prodotto di Lie di campi vettoriali: definizione e proprietà. Composizione di più gruppi a un parametro e commutazione dei campi vettoriali corrispondenti. Esempi di campi vettoriali che commutano (traslazioni) e che non commutano (rotazioni). Teorema di Frobenius. Teorema di Noether nel caso di più gruppi di simmetrie ed esistenza di più variabili cicliche.

## 7. Teoria delle piccole oscillazioni

Piccole oscillazioni: lagrangiana quadratica, modi normali e frequenze proprie. Piccole oscillazioni per pendoli accoppiati uguali e fenomeno dei battimenti. Piccole oscillazioni per pendoli accoppiati diversi. Piccole oscillazioni per sistemi vincolati: rigidità, ellissoide associato all'energia potenziale, principio del minimax e teorema di Rayleigh-Courant-Fisher.

## 8. Teoria delle perturbazioni

Sistemi quasi-integrabili: esempio del sistema solare. Equazione di Hamilton-Jacobi e teoria perturbativa al primo ordine. Equazione omologica. Vettori diofantei. Problemi di convergenza delle serie in dimensione qualsiasi. Primo teorema di trivialità di Poincaré. Sistemi isocroni. Condizione di anisocronia (o condizione di non degenerazione di Kolmogorov) e sistemi anisocroni. Difficoltà di iterare il procedimento perturbativo a ordini alti nel caso di sistemi anisocroni. Teoria perturbativa a tutti gli ordini per sistemi isocroni. Teorema di Nekhorošev per sistemi isocroni: controllo sulle variazioni delle azioni per tempi esponenzialmente lunghi. Serie di Birkhoff. Controesempi alla convergenza delle serie di Birkhoff. Cenni sul teorema KAM.

## TESTI CONSIGLIATI

- [1] G. GENTILE, *Introduzione ai sistemi dinamici. 1. Equazioni differenziali ordinarie, analisi qualitativa e alcune applicazioni.* (2018).  
 [2] G. GENTILE, *Introduzione ai sistemi dinamici. 2. Meccanica lagrangiana e hamiltoniana.* (2018).

## BIBLIOGRAFIA SUPPLEMENTARE

- [3] V.I. ARNOL'D, *Metodi Matematici della Meccanica Classica.* Editori Riuniti, (1979).  
 [4] G. DELL'ANTONIO, *Elementi di Meccanica.* Liguori Editore, (1996).  
 [5] A. FASANO & S. MARMI, *Meccanica analitica.* Bollati Boringhieri, (1994).  
 [6] G. GALLAVOTTI, *Meccanica Elementare.* Bollati-Boringhieri, (1980).  
 [7] L.D. LANDAU & E.M. LIFSHITZ, *Meccanica.* Editori Riuniti, (1976).

## MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)		<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto	<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO
	orale	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO

**NOTA 1.** L'insegnamento nel Corso di Laurea in Fisica è diviso in due moduli (Modulo A e Modulo B, di 3 CFU ciascuno), che possono essere seguiti indipendentemente; i programmi del Modulo A e del Modulo B corrispondono ai punti 1-4 e, rispettivamente, 5-8 del programma sopra. Nei CdS in Matematica e in Scienze Computazionali i due moduli costituiscono un unico insegnamento di 6 CFU.

**NOTA 2.** L'esame consiste in un colloquio orale in cui lo studente dovrà discutere gli argomenti trattati a lezione. In riferimento alla prima parte dell'insegnamento (modulo A), si richiede lo svolgimento di almeno 5 dei seguenti esercizi del Cap. 5 di [1]: 13, 16, 19, 21, 22, 24, 25, 31, 34, 43, 46, 47, 56, 58, 59 e 64, e lo studio del modello SEIR endemico. In riferimento alla seconda parte dell'insegnamento (modulo B), si richiede la discussione, oltre un ulteriore argomento a scelta, di uno dei seguenti argomenti: sistema ridotto della trottola di Lagrange: casi 2 e 3; sistema ridotto della trottola di Lagrange: caso 4; trottola addormentata e trottola veloce; piccole oscillazioni per pendoli accoppiati; piccole oscillazioni per sistemi vincolati; serie di Birkhoff.