Definizione 20.1 (DIFFEOMORFISMO) *Dati due insiemi $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, si chiama* diffeomorfismo *un'applicazione $f\colon A \to B$ differenziabile e invertibile, con inversa differenziabile. In tal caso si dice che A e B sono* diffeomorfi *e che f è un diffeomorfismo di classe C^k se f e la sua inversa sono di classe C^k.*

Dato uno spazio vettoriale E di dimensione n un *iperpiano* passante per $x \in E$ è un insieme di vettori applicati della forma (x, v), al variare di v in un sottospazio di E di dimensione $n-1$.

Definizione 20.2 (SEZIONE LOCALE) *Sia $x \in \mathbb{R}^n$ tale che $f(x) \neq 0$. Una* sezione locale *di f in x è un insieme aperto S di dimensione $n-1$ contenuto nell'iperpiano π passante per x e trasverso a f, i.e. tale che il vettore applicato $(z, f(z)) \notin \pi$ per ogni $z \in S$.*

Osservazione 20.3 Se S è una sezione locale, per ogni $z \in S$ il vettore applicato $(z, f(z))$ non è contenuto nell'iperpiano che contiene S: il campo vettoriale in tutti i punti della sezione è diretto sempre "dalla stessa parte" rispetto alla sezione.

Teorema 20.4 (TEOREMA DELLA SCATOLA DI FLUSSO) *Sia dato il sistema dinamico* (17.1)*, e sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $f(x_0) \neq 0$. Esiste allora un intorno $B(x_0)$ e un diffeomorfismo $\psi\colon B(x_0) \to B(0)$, da $B(x_0)$ a un intorno dell'origine di $\mathbb{R}^n$, che trasforma le soluzioni del sistema dinamico* (17.1) *in $B(x_0)$ nelle soluzioni del sistema dinamico*

$$\dot{x} = n_0,$$

in $B(0)$, dove n_0 è un versore costante. Se f è di classe C^k allora ψ è di classe C^k.

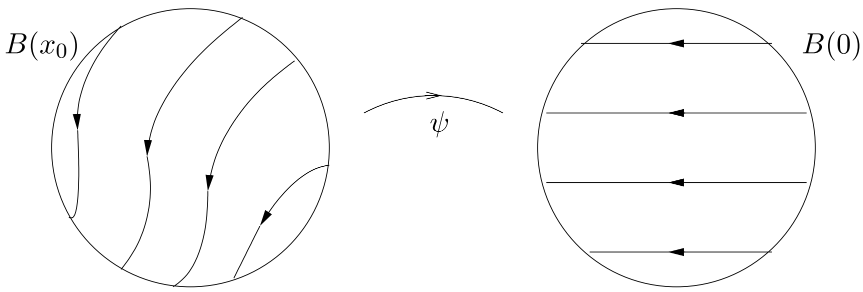

Figura 4.10: Rappresentazione schematica del significato del teorema della scatola di flusso.

Dimostrazione. Poiché $f(x_0) \neq 0$, esiste una sezione locale $S \subset \pi$, dove π è un iperpiano passante per x_0. Scegliendo un opportuno sistema di coordinate possiamo supporre che sia $x_0 = 0$ e scrivere $\pi = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$. Si ha inoltre $f_n(x_0) = a \neq 0$; possiamo senz'altro supporre che sia $a > 0$. Sia $B(x_0) = B_\delta(x_0)$ un intorno con raggio δ sufficientemente piccolo così che risulti $f_n(x) > a/2$ per ogni $x \in B_\delta(x_0)$; questo è sicuramente possibile poiché il campo vettoriale è continuo (cfr. l'esercizio 20 del capitolo 3). La soluzione dell'equazione (17.1) con dato iniziale x si può scrivere

$$\varphi(t,x) = x + \int_0^t \mathrm{d}s\, f(\varphi(s,x)). \tag{20.1}$$

Vogliamo dimostrare che è possibile scegliere l'intorno $B_\delta(x_0)$ in modo tale che esista un tempo $\tau(x)$ tale che

$$\varphi_n(\tau(x),x) = 0, \qquad |\tau(x)| \le \sigma, \tag{20.2}$$

per qualche $\sigma > 0$ e per ogni $x \in B_\delta(x_0)$. La (20.2) dice che la componente n-esima di $\varphi(t,x)$ si annulla, i.e. l'evoluto di x raggiunge la sezione S, in un tempo finito $\tau(x)$. Chiamiamo $\tau(x)$ il *tempo di attraversamento* di S del punto x (cfr. la figura 4.11).

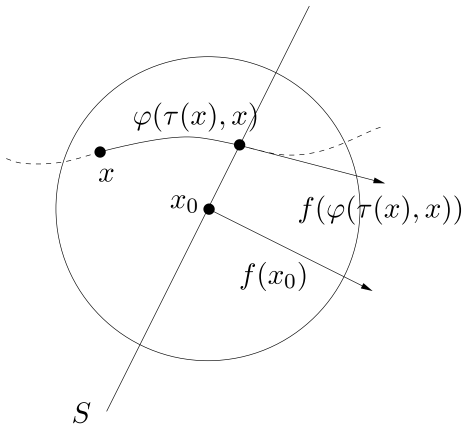

Figura 4.11: Scenario previsto nella discussione del teorema della scatola di flusso.

Definiamo la funzione

$$F(x,\tau) := x_n + \int_0^\tau \mathrm{d}s\, f_n(\varphi(s,x)). \tag{20.3}$$

Per $x = x_0 = 0$ e $\tau = 0$ si ha $F(0,0) = 0$; inoltre $[\partial F/\partial\tau](0,0) = f_n(0) \neq 0$ per ipotesi. Per il teorema della funzione implicita (cfr. l'esercizio 36), esiste un intorno, che – eventualmente prendendo un raggio δ più piccolo – possiamo identificare con $B_\delta(x_0)$, tale che, per ogni $x \in B_\delta(x_0)$, esiste un valore $\tau = \tau(x)$ tale che $F(x,\tau(x)) = 0$. Tale condizione, data la definizione della funzione (20.3), implica la prima delle (20.2).

Si noti inoltre che si ha

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} = 1 + \int_0^\tau \mathrm{d}s\, \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\left(\varphi(s,x)\right), \qquad \frac{\partial F}{\partial \tau} = f_n\left(\varphi(\tau,x)\right),$$

così che (cfr. l'esercizio 20)

$$\left.\frac{\partial\tau(x)}{\partial x_n}\right|_{x=x_0} = -\frac{[\partial F/\partial x_n](x_0,0)}{[\partial F/\partial\tau](x_0,0)} = -\frac{1}{f_n(x_0)} \neq 0. \tag{20.4}$$

Inoltre, sempre dal teorema della funzione implicita, segue che $\tau(x)$ è una funzione di classe C^k di x, se f è di classe C^k (cfr. l'esercizio 36).

È immediato verificare inoltre che esiste $\sigma > 0$ tale che $|\tau(x)| \le \sigma$ per ogni $x \in B_\delta(x_0)$, ragionando come segue. Supponiamo per assurdo che questo non sia vero. Allora dovrebbe esistere un valore $\sigma > 0$ e un punto $z \in B_\delta(x_0)$ tali che $|\tau(z)| > \sigma$. Per tale z, in

$$F(z,\tau(z)) = z_n + \int_0^{\tau(z)} \mathrm{d}s\, f_n(\varphi(s,z)),$$

potremmo stimare

$$|z_n| < |z| < \delta, \qquad \left|\int_0^{\tau(z)} \mathrm{d}s\, f_n(\varphi(s,z))\right| > \left|\int_0^{\tau(z)} \mathrm{d}s\, \frac{a}{2}\right| > \frac{a\sigma}{2},$$

che però implicherebbe $F(z,\tau(z)) \neq 0$ non appena fosse $\sigma > 2\delta/a$, in contraddizione con la definizione di $\tau(z)$ per $z \in B_\delta(x_0)$. In particolare si vede che si deve avere $\sigma < \sigma_0 = 2\delta/a$.

Consideriamo il cambiamento di coordinate $\psi\colon (x_1,\ldots,x_n) \to (y_1,\ldots,y_n)$ definito da

$$\begin{cases} y_i = \psi_i(x) = \varphi_i(\tau(x),x), \quad i = 1,\ldots,n-1, \\ y_n = \psi_n(x) = \tau(x), \end{cases} \tag{20.5}$$

per $x \in B_\delta(x_0)$; geometricamente y_i, per $i \le n-1$, è la coordinata i-esima su S del punto in cui $\varphi(t,x)$ attraversa S. Per il teorema 12.8 (teorema della dipendenza differenziabile dai dati iniziali), se f è di classe C^k allora le funzioni ψ_i, $i = 1,\ldots,n-1$, sono di classe C^k. Per dimostrare che il cambiamento di coordinate ψ è un'applicazione invertibile con inversa di classe C^k (in un intorno di x_0) è sufficiente dimostrare che la matrice jacobiana è non singolare (cfr. gli esercizi 37 e 38). Per $i \le n-1$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}(x_0) &= \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi_i(\tau(x),x)\right|_{x=x_0} \qquad (20.6) \\ &= \delta_{ij} + \int_0^{\tau(x)} \mathrm{d}s \left.\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(\varphi(s,x))\right|_{x=x_0} + f_i(\varphi(\tau(x),x)) \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\tau(x)\right|_{x=x_0} = \delta_{ij}, \end{aligned}$$

poiché ψ_i è la i-esima componente di (20.1), $\tau(x_0) = 0$ e $f_i(x_0) = 0$ per $i < n$. Le (20.4) e (20.6) implicano che la matrice jacobiana $J_{ij} = [\partial\psi_i/\partial x_j](x_0)$ associata al cambiamento di variabili (20.4) ha la forma

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ J_{n1} & J_{n2} & J_{n3} & \dots & J_{n(n-1)} & -[f_n(x_0)]^{-1} \end{pmatrix} \tag{20.7}$$

dove $J_{nn} = -1/f_n(x_0)$ per la (20.4), mentre gli elementi indicati con J_{nj}, $j = 1, \dots, n-1$, non sono esplicitati perché è inutile calcolarli: infatti, quale che sia la loro forma, segue immediatamente dalla (20.7) che $\det J = -[f_n(x_0)]^{-1}$ e quindi la matrice jacobiana è non singolare. Questo, unito ai commenti precedenti, implica che il cambiamento di coordinate (20.5) è invertibile e di classe C^k se f è di classe C^k.

Studiamo la forma che assumono le equazioni (17.1) nelle nuove coordinate (20.4). Per costruzione si ha

$$\begin{aligned} \psi_i(\varphi(t,x)) &= \varphi_i(\tau(\varphi(t,x)), \varphi(t,x)) = \varphi_i(\tau(x) - t, \varphi(t,x)) \\ &= \varphi_i(\tau(x), \varphi(-t+t,x)) = \varphi_i(\tau(x), x) = \psi_i(x), \end{aligned}$$

per $i = 1, \dots, n-1$, e

$$\psi_n(\varphi(t,x)) = \tau(\varphi(t,x)) = \tau(x) - t = \psi_n(x) - t.$$

Quindi, per t sufficientemente piccolo (in modo che le soluzioni $\varphi(t,x)$ di (17.1) con dati iniziali in $B_\delta(x_0)$ non escano da $B_\delta(x_0)$), si ha

$$\begin{cases} y_i(t) = \psi_i(\varphi(t,x)) = \psi_i(x) = y_i(0), & i = 1, \dots, n-1, \\ y_n(t) = \psi_n(\varphi(t,x)) = \psi_n(x) - t = y_n(0) - t, \end{cases} \tag{20.8}$$

così che il flusso è della forma (20.1) con $n_0 = (0, 0, \dots, 0, -1)$, come è immediato verificare semplicemente derivando le (20.8) rispetto al tempo. ∎

Nota bibliografica Per gli argomenti trattati nel presente capitolo abbiamo seguito prevalentemente [Hirsch & Smale, Cap. 9] e [Dell'Antonio, Cap. III]. In particolare, i §§17, 19 e 20 seguono da vicino [Dell'Antonio], mentre il §18, tranne che per l'esempio 18.9, preso da [Dell'Antonio], è più simile alla trattazione svolta in [Hirsch & Smale]. L'esempio discusso nell'osservazione 19.24 è preso da [Dell'Antonio, Cap. III]. Per il teorema di Četaev si veda [Khalil, Cap. 4] e, specie per le applicazioni ai sistemi meccanici conservativi, [Rouche *et al.*, Cap. III].

Per i risultati di analisi matematica nei §§17 e 19, si veda [Giusti-1, Capp. 2 e 3]; per le definizioni e le proprietà del massimo e del minimo limite, in particolare, rimandiamo a [Giusti-1, Cap. 2]. Per la dimostrazione del teorema della funzione implicita (cfr. gli esercizi 3÷6) si è seguito [de Oliveira]; per una diversa dimostrazione, basata sul principio delle contrazioni e sul teorema della funzione inversa, si può vedere, per esempio, [Rudin, Cap. 9].