

## 5 | Esempi di analisi qualitativa

### §21 Sistemi planari

Anche nel caso di sistemi non lineari, come già fatto nel caso dei sistemi lineari (cfr. il §7), studiamo in dettaglio i sistemi planari, per i quali è facile visualizzare le traiettorie e le curve di livello, trattandosi di curve nel piano.

Inoltre la bassa dimensionalità dello spazio in cui si svolge il moto ha forti implicazioni topologiche sulle orbite (dovute in ultima analisi al fatto che le traiettorie non si possono intersecare). Questo porta a risultati notevoli, tra cui spicca il teorema di Poincaré-Bendixson, ricco di importanti conseguenze, illustrate nei teoremi successivi.

Notiamo anche che se da una parte il fatto che il sistema sia planare consente in principio una conoscenza più dettagliata del moto rispetto al caso generale (i.e. in  $\mathbb{R}^n$ , per  $n$  qualsiasi), dall'altra in pratica questo richiede un'analisi approfondita e abbastanza delicata del sistema: alcune delle proprietà considerate più avanti possono apparire "ovvie" se si prova a fare dei disegni, ma risultano sottili se si pretende una trattazione analitica consistente e completa. Si tenga presente inoltre che molti risultati, incluso il teorema di Poincaré-Bendixson, non si possono estendere, neppure in una qualche forma più debole, a sistemi in  $\mathbb{R}^n$ , con  $n \geq 3$ .

Consideriamo un sistema della forma (17.1), con  $n = 2$  (*sistema planare*),

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (21.1)$$

Chiameremo  $\mathbb{R}^2$  il *piano delle fasi* del sistema (cfr. pag. 166). Ricordiamo che, se  $x \in \mathbb{R}^n$  è tale che  $f(x) \neq 0$ , una *sezione locale* di  $f$  in  $x$  è un insieme aperto  $S$  di dimensione  $n - 1$ , contenente  $x$  e trasverso a  $f$  (cfr. la definizione 20.2). Se  $n = 2$ ,  $\dim(S) = 1$  e  $S$  è un segmento aperto contenente  $x$  e tale che il campo vettoriale in tutti i suoi punti è diretto sempre verso destra o sempre verso sinistra. Inoltre le superfici di livello sono curve – le *curve di livello* (cfr. il §17, in particolare i commenti dopo la (17.5)). Si noti che le curve di livello di una funzione che sia una costante del moto per il sistema (21.1) contengono traiettorie del sistema; in generale le curve di livello possono essere costituite da più componenti connesse.

**Definizione 21.1** (SUCCESIONE DI PUNTI MONOTONA LUNGO UNA CURVA) *Diremo che una successione di punti  $\{x_n\}$  lungo una curva  $C = \{\varphi(t, x) : 0 \leq t \leq T\}$ , con  $x \in \mathbb{R}^2$  e  $T > 0$ , è monotona lungo  $C$ , se  $x_n = \varphi(t_n, x)$ , con  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq T$ .*

**Definizione 21.2** (SUCCESIONE DI PUNTI MONOTONA LUNGO UNA SEZIONE LOCALE) *Diremo che una successione di punti  $\{y_n\}$  appartenenti a una sezione locale  $S$  è monotona lungo  $S$  se  $y_n$  è tra  $y_{n-1}$  e  $y_{n+1}$  (eventualmente coincidente con uno di essi o con entrambi) nell'ordinamento naturale.*

**Lemma 21.3** *Sia  $S$  una sezione locale di un sistema dinamico planare (21.1) e sia  $\{y_n\}$  una successione di punti su  $S$  che appartengono alla stessa curva  $C = \{\varphi(t, x) : 0 \leq t \leq T\}$ , con  $x \in \mathbb{R}^2$  e  $T > 0$ . Se  $\{y_n\}$  è monotona lungo  $C$ , allora è monotona anche lungo  $S$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo un punto  $y_n$  della successione. Siano  $y_{n+1} \in S$  il punto successivo in cui la curva  $C$  attraversa  $S$  e  $C_n$  il tratto della curva compreso tra  $y_n$  e  $y_{n+1}$ ; poiché  $S$  è una sezione locale  $f(y_n)$  e  $f(y_{n+1})$  sono diretti dalla stessa parte rispetto a  $S$  (cfr. la figura 5.1). Se  $y_n = y_{n+1}$  allora, per il teorema 11.27 (teorema di unicità),  $y_h = y_n$  per ogni  $h$  e il lemma è dimostrato. Altrimenti, se  $y_n \neq y_{n+1}$ , indichiamo con  $D_n$  l'insieme compatto che ha come frontiera  $C_n$  e il segmento contenuto in  $S$  che unisce i due punti  $y_n$  e  $y_{n+1}$ .

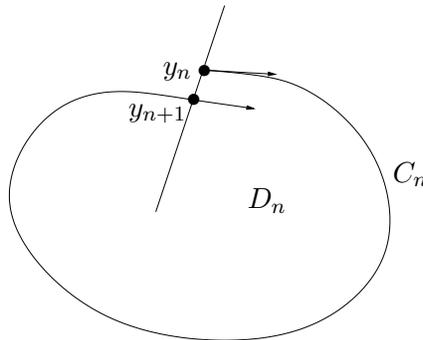


Figura 5.1: Scenario previsto nella discussione del lemma 21.3.

Supponiamo che la traiettoria che parte da  $y_{n+1}$  entri in  $D_n$  (se esce si ragiona in modo assolutamente analogo). L'insieme  $D_n$  è allora positivamente invariante (non potendo la traiettoria riattraversare  $C_n$  per il teorema 11.27 (teorema di unicità)). Questo vuol dire che la traiettoria che parte da  $y_{n+1}$  riattraversa  $S$  in un punto  $y_{n+2}$  all'interno di  $D_n$  e quindi  $y_{n+1}$  è compreso tra  $y_n$  e  $y_{n+2}$ . Data l'arbitrarietà di  $n$  segue l'asserto. ■

**Osservazione 21.4** Si noti che nella definizione dell'insieme  $D_n$ , come del resto già altrove in precedenza (cfr. per esempio la discussione dell'esercizio 29 del capitolo 4) abbiamo implicitamente fatto uso del *teorema della curva di Jordan* (cfr. la nota bibliografica). Una *curva di*

*Jordan* è definita come una curva chiusa continua che non si autointerseca e il teorema citato afferma che il complemento di una curva di Jordan  $\gamma$  nel piano è costituito da due insiemi disgiunti  $\Omega_i$  e  $\Omega_e$ , la cui frontiera è data dalla curva  $\gamma$  stessa e tali che  $\Omega_i$  è limitato (ed è chiamato *l'insieme interno*) e  $\Omega_e$  è illimitato (ed è chiamato *l'insieme esterno*). Nel nostro caso  $\gamma$  è la curva costituita da  $C_n$  e il segmento in  $S$  compreso tra i punti  $y_n$  e  $y_{n+1}$ , mentre  $D_n$  è la chiusura dell'insieme interno. Come è consuetudine fare nei trattati di sistemi dinamici, assumeremo il teorema della curva di Jordan senza darne la dimostrazione (che è tutt'altro che banale, nonostante l'enunciato sembri innocuo).

**Lemma 21.5** *Sia  $y \in \mathbb{R}^2$  tale che  $f(y) \neq 0$  e sia  $S$  una sezione locale di  $f$  in  $y$ . Allora esiste  $\delta > 0$  tale che, per ogni  $z \in B_\delta(y)$ , esistono  $\sigma > 0$  e un tempo  $t = t(z)$  tale che  $|t| < \sigma$  e  $\varphi(t, z) \in S$ . In particolare l'applicazione  $z \mapsto t(z)$  è di classe  $C^1$  e si ha  $\sigma < 2\delta/|f(y)|$ .*

*Dimostrazione.* La dimostrazione del lemma è una semplice applicazione del teorema della funzione implicita (cfr. l'esercizio 4 del capitolo 4). Introduciamo un sistema di coordinate  $(x_1, x_2)$  tale che sia  $y = 0$ , e risulti  $f_1(y) = a > 0$  e  $f_2(y) = 0$  (cfr. la figura 5.2). Per continuità esiste  $\delta > 0$  tale che  $f_1(z) > a/2$  per ogni  $z \in B_\delta(y)$ . Definiamo la funzione

$$F(z, t) = z_1 + \int_0^t ds f_1(\varphi(s, z)). \quad (21.2)$$

Si ha  $F(y, 0) = y_1 = 0$  e  $[\partial F/\partial t](y, 0) = f_1(y) \neq 0$ ; possiamo applicare il teorema della funzione implicita e concludere che, per ogni  $z \in B_\delta(y)$  esiste  $t(z)$  tale che  $F(z, t(z)) = 0$ : questo implica che  $\varphi_1(t(z), z) = 0$ , i.e.  $\varphi(t(z), z) \in S$  (cfr. la figura 5.2).

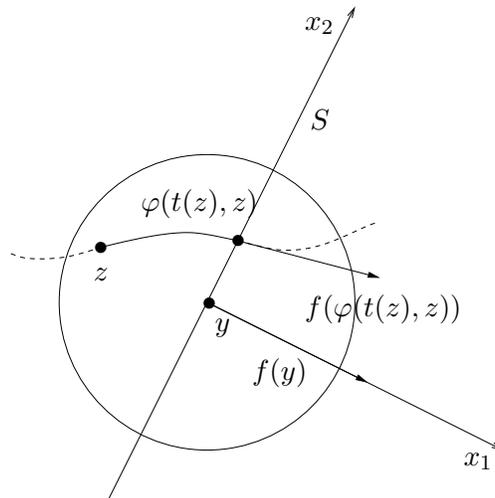


Figura 5.2: Scenario previsto nella discussione del lemma 21.5.

Per concludere la dimostrazione occorre far vedere che, fissato  $\delta > 0$  come sopra, esiste in corrispondenza  $\sigma > 0$  tale che  $|t(z)| < \sigma$  per ogni  $z \in B_\delta(y)$ . Ragioniamo come per il teorema 20.4 (teorema della scatola di flusso). Supponiamo per assurdo che questo non sia vero. Allora comunque si fissasse  $\sigma > 0$  dovrebbe esistere  $z \in B_\delta(y)$  tale che  $|t(z)| > \sigma$ . Per tale  $z$ , in

$$F(z, t(z)) = z_1 + \int_0^{t(z)} ds f_1(\varphi(s, z)), \quad (21.3)$$

potremmo stimare

$$|z_1| < |z| < \delta, \quad \left| \int_0^{t(z)} ds f_1(\varphi(s, z)) \right| > \int_0^{|t(z)|} ds \frac{a}{2} > \frac{a\sigma}{2}, \quad (21.4)$$

che però implicherebbe  $F(z, t(z)) \neq 0$  non appena fosse  $\sigma > 2\delta/a$ , in contraddizione con la definizione di  $t(z)$  per  $z \in B_\delta(y)$ . In particolare si vede che si deve avere  $\sigma < \sigma_0 := 2\delta/a$ . ■

**Lemma 21.6** *Se  $y \in L_\omega(x) \cup L_\alpha(x)$ ,  $\varphi(t, y)$  attraversa ogni sezione locale al più in un punto.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $y \in L_\omega(x)$  (se  $y \in L_\alpha(x)$  si ragiona in modo simile). Procediamo per assurdo. Supponiamo che la traiettoria che parte da  $y$  attraversi una sezione locale  $S$  in due punti distinti  $z_1$  e  $z_2$ . Poiché gli insiemi limite sono invarianti (cfr. il teorema 17.18) si ha  $z_1, z_2 \in L_\omega(x)$ . Quindi esistono due successioni  $\{t_k\}$  e  $\{s_k\}$  tali che  $|\varphi(t_k, x) - z_1| \rightarrow 0$  e  $|\varphi(s_k, x) - z_2| \rightarrow 0$ . Questo vuol dire che, scelto  $\varepsilon > 0$ , esiste  $k_0 > 0$  tale che, per ogni  $k > k_0$ ,  $\varphi(t_k, x) \in B_\varepsilon(z_1)$  e  $\varphi(s_k, x) \in B_\varepsilon(z_2)$ . Sia  $J_1 = B_\varepsilon(z_1) \cap S$  e  $J_2 = B_\varepsilon(z_2) \cap S$ . Per il lemma 21.5 possiamo concludere che (prendendo  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo) esistono due successioni  $\{\tau_k\}$  e  $\{\sigma_k\}$  tali che  $\varphi(\tau_k, x) \in J_1$  e  $\varphi(\sigma_k, x) \in J_2$ . Possiamo scegliere  $\varepsilon$  tale che  $J_1 \cap J_2 = \emptyset$  (cfr. la figura 5.3) e, prendendo eventualmente sottosuccessioni, si può supporre che sia  $\tau_k < \sigma_k < \tau_{k+1}$  (per il lemma 17.14). Si ha perciò una successione di punti  $\{y_n\}$ , definiti come  $y_{2p-1} = \varphi(\tau_p, x)$  e  $y_{2p} = \varphi(\sigma_p, x)$ , per  $p \geq 1$  che è monotona lungo la traiettoria  $\varphi(t, x)$  senza essere monotona lungo la sezione  $S$ . Questo contraddice il lemma 21.3. ■

**Teorema 21.7** (TEOREMA DI POINCARÉ-BENDIXSON) *Dato un sistema planare (21.1), ogni insieme limite compatto non vuoto che non contenga punti di equilibrio è l'orbita di una traiettoria periodica.*

*Dimostrazione.* Al solito ci limitiamo al caso degli insiemi  $\omega$ -limite; il caso degli insiemi  $\alpha$ -limite si discute allo stesso modo. Sia  $y \in L_\omega(x)$ , con  $L_\omega(x)$  compatto (alla luce del teorema 17.17 e dell'esercizio 13 del capitolo 1, basta assumere che  $L_\omega(x)$  sia limitato). Esiste dunque una successione  $\varphi(t_k, x)$  tale che  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\varphi(t_k, x) - y| = 0$ . Poiché  $L_\omega(x)$  non contiene punti di equilibrio, si ha  $|f(y)| = a > 0$ . Scegliamo un sistema di coordinate  $(x_1, x_2)$  con origine in  $y$ , tale che  $f_1(y) = a > 0$  e  $f_2(y) = 0$  (come nella dimostrazione del lemma 21.5).

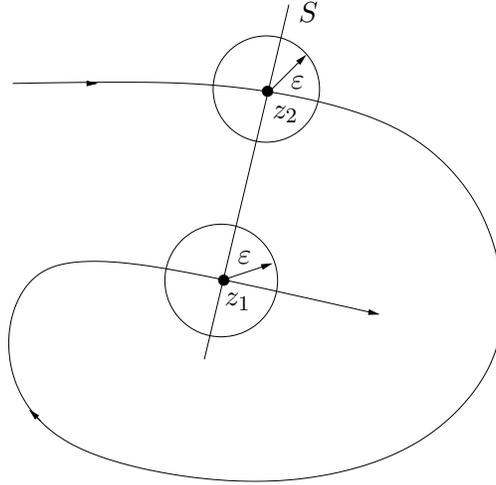


Figura 5.3: Costruzione grafica per la discussione del lemma 21.6.

Fissato un intorno  $B_\varepsilon(y)$ , esiste un indice  $k_0 > 0$  tale che  $\varphi(t_k, x) \in B_\varepsilon(y)$  per ogni  $k > k_0$ . Se  $\varepsilon$  è scelto in modo tale che  $f_1(z) > a/2$  per ogni  $z \in B_\varepsilon(y)$ , possiamo applicare il lemma 21.5 e concludere che, per ogni  $k > k_0$ , esiste  $\sigma_k$  tale che  $\varphi_1(t_k + \sigma_k, x) = 0$ . La successione  $\{\sigma_k\}$ , inoltre, è tale che  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = 0$ . Infatti possiamo scegliere  $\delta_k > |\varphi(t_k, x) - y|$  tale che  $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0$ , poiché  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k, x) = y$ , e il lemma 21.5 dà  $|\sigma_k| < 2\delta_k/a$ .

Definiamo  $\tau_k = t_k + \sigma_k$  e consideriamo la successione  $y_k = \varphi_2(\tau_k, x)$ . Per il lemma 21.3 la successione  $y_k$  è monotona decrescente, i.e.  $y_{k+1} \leq y_k \forall k$ . Sono possibili due casi:

1. Esiste un indice  $h$  tale che  $y_h = y_{h+1}$ .
2. Si ha  $y_{h+1} < y_h \forall h$ .

Nel caso 1 la traiettoria  $\varphi(t, x)$  è periodica di periodo  $T := \tau_{h+1} - \tau_h$ . Inoltre, poiché i punti  $\varphi(\tau_k, x)$  tendono a  $y$ , il punto  $y$  deve appartenere alla traiettoria. Se così non fosse, la traiettoria che parte da  $x$ , essendo periodica, non si potrebbe avvicinare indefinitamente a  $y$ . Infatti la quantità  $m = \min_{t \in [0, T]} |\varphi_2(t, x)|$ , che deve esistere per il teorema di Weierstrass (cfr. l'esercizio 14 del capitolo 1), sarebbe in tal caso diversa da zero e quindi esisterebbe un intorno di  $y$  di raggio minore di  $m$  privo di punti lungo la traiettoria che parte da  $x$ , contro l'ipotesi che sia  $y \in L_\omega(x)$ . Ne consegue che  $y_h = y$  e  $L_\omega(x) = \gamma$ , dove  $\gamma$  è l'orbita della traiettoria periodica  $\varphi(t, x)$  (cfr. la figura 5.4).

Nel caso 2, i punti  $\varphi(\tau_k, x)$  sono tutti distinti (cfr. la figura 5.4). Poiché  $\varphi(t, y) \in L_\omega(x)$ , per l'invarianza degli insiemi limite (cfr. il teorema 17.18) e  $L_\omega(x)$  è compatto per ipotesi, da ogni successione  $\varphi(t_k, y)$  si può estrarre una sottosuccessione convergente, quindi  $L_\omega(y) \neq \emptyset$ . Sia  $y_1 \in L_\omega(y)$ . Deve essere  $f(y_1) \neq 0$  perché  $y_1 \in L_\omega(x)$  (per il teorema 17.22) e, per ipotesi,

$L_\omega(x)$  non contiene punti di equilibrio. La traiettoria che parte da  $y$  deve attraversare infinite volte una sezione locale  $S_1$  di  $f$  in  $y_1$ : questo segue dalla definizione di insieme limite e dal lemma 21.5. Indichiamo con  $\varphi(T_k, y)$ , per una opportuna successione  $\{T_k\}$ , la successione di punti lungo la traiettoria  $\varphi(t, y)$  che intersecano  $S_1$ . Possiamo applicare il lemma 21.6 e concludere che  $\varphi(T_k, y) = \varphi(T_h, y)$  per ogni  $k, h$ . In particolare deve essere  $y_1 = \varphi(T_k, y)$  per ogni  $k$ , così che anche in questo caso la traiettoria che parte da  $y$  è periodica. Quindi la traiettoria che passa per  $y$  è un'orbita chiusa  $\gamma$  contenuta in  $L_\omega(x)$ .

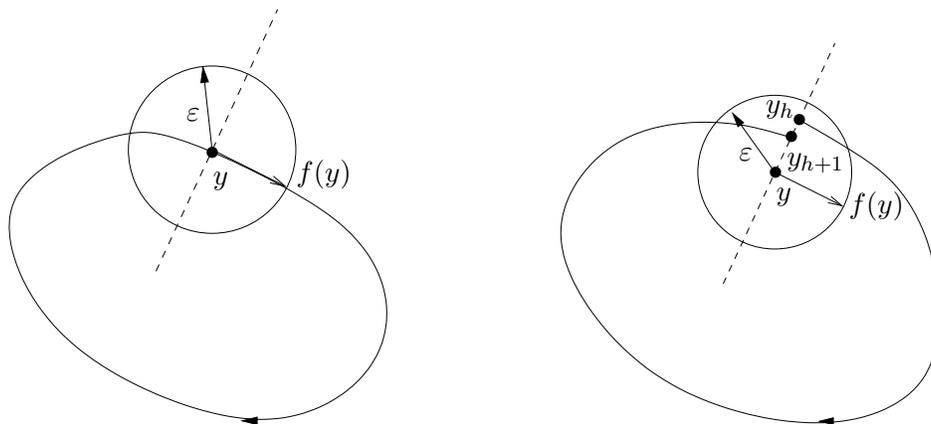


Figura 5.4: Scenario previsto nella discussione del teorema 21.7: caso 1 a sinistra e caso 2 a destra.

Resta da dimostrare che  $\gamma = L_\omega(x)$ . Se così non fosse  $L_\omega(x)$  sarebbe unione di orbite chiuse, perché per ogni altro punto  $y_2 \in L_\omega(x)$  potremmo ripetere la discussione precedente. Per l'unicità della soluzione di (21.1) tali orbite dovrebbero essere disgiunte, ma questo, unito alla compattezza di  $L_\omega(x)$ , contraddice il fatto che gli insiemi limite compatti debbano essere connessi (teorema 17.20). ■

**Osservazione 21.8** Dato un sistema dinamico  $(W, \varphi)$  si definisce *attrattore* un sottoinsieme  $A$  di  $W$  che abbia le seguenti proprietà:

1.  $A$  è positivamente invariante, i.e.  $\varphi(t, \bar{x}) \in A \forall \bar{x} \in A$ ,
2. esiste un insieme  $B(A)$ , chiamato *bacino d'attrazione* di  $A$ , tale che per ogni  $\bar{x} \in B(A)$  e per ogni aperto  $\Lambda \supset A$  esiste  $T > 0$  tale che  $\varphi(t, \bar{x}) \in \Lambda \forall t > T$ ,
3. non esiste alcun sottoinsieme proprio di  $A$  che abbia le stesse proprietà.

In sostanza, un attrattore è un insieme  $A$  verso cui evolvono tutte le traiettorie di un sistema dinamico con dati iniziali che siano nell'insieme  $B(A)$ .

**Esempio 21.9** Si possono fare esempi di insiemi limite che non siano né orbite chiuse né punti di equilibrio. Per esempio si può immaginare un sistema le cui traiettorie siano come nella figura 5.5. Si hanno tre punti di equilibrio instabili: uno nell'intersezione dei lobi della *lemniscata* (o figura a 8) e due al loro interno. Tutte le traiettorie con dati iniziali che non appartengono ai due lobi tendono a essi (allontanandosi dai punti di equilibrio all'interno se i dati iniziali sono all'interno). Quindi la lemniscata è l'insieme  $\omega$ -limite di tutti i punti esterni e ciascuno dei due lobi è anche l'insieme  $\omega$ -limite di tutti i punti interni a esso, con l'esclusione dei punti di equilibrio. Punti di equilibrio, cicli limite e la lemniscata della figura 5.5 costituiscono esempi di attrattori.

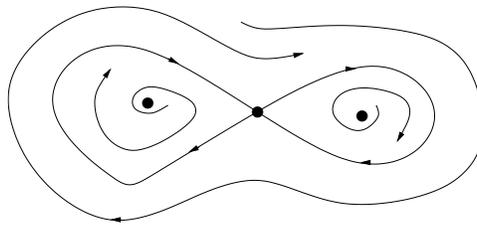


Figura 5.5: Insieme  $\omega$ -limite per il sistema discusso nell'esempio 21.9.

**Definizione 21.10** (CICLO LIMITE) *Un'orbita chiusa  $\gamma$  è un ciclo limite se  $\gamma = L_\omega(x)$  oppure  $\gamma = L_\alpha(x)$  per qualche  $x \notin \gamma$ ; nel primo caso diremo che  $\gamma$  è un ciclo  $\omega$ -limite, nel secondo che  $\gamma$  è un ciclo  $\alpha$ -limite.*

Sia  $\gamma$  un ciclo  $\omega$ -limite per il sistema dinamico planare (21.1). Una traiettoria  $\varphi(t, x)$ , con  $x \notin \gamma$ , si muove a spirale (o descrive un moto a spirale) verso  $\gamma$  (cfr. la figura 5.6) se, comunque siano fissati un punto  $y \in \gamma$  e una sezione locale  $S$  contenente  $\gamma$ , la traiettoria  $\varphi(t, x)$  attraversa  $S$  lungo una successione strettamente monotona di punti  $\{y_n\}$  convergenti a  $y$ .

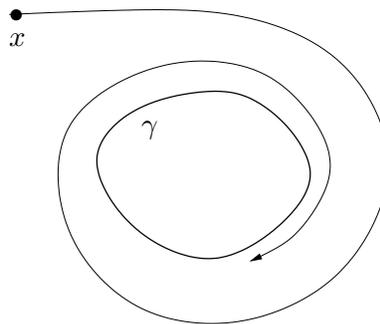


Figura 5.6: Esempio di ciclo limite  $\gamma = L_\omega(x)$ : la traiettoria  $\varphi(t, x)$  si muove a spirale verso  $\gamma$ .

**Lemma 21.11** *Sia  $\gamma$  un ciclo limite per il sistema dinamico planare (21.1). Se  $\gamma = L_\omega(x)$  per qualche  $x \notin \gamma$ , allora la traiettoria  $\varphi(t, x)$  si muove a spirale verso  $\gamma$ .*

*Dimostrazione.* Poiché  $\gamma = L_\omega(x)$ , se  $y \in L_\omega(x)$  e  $S$  è una sezione locale di  $f$  in  $y$ , fissato un intorno  $B_\varepsilon(y)$  esiste un indice  $k_0$  e una successione di punti  $\varphi(t_k, x) \in B_\varepsilon(y)$  per  $k > k_0$ . Sia  $\varepsilon$  tale da poter applicare il lemma 21.5 e concludere che, per ogni  $t_k$ , con  $k > k_0$ , esiste una successione  $\{\sigma_k\}$  tale che  $y_n = \varphi(t_k + \sigma_k, x) \in S$ . Per il lemma 21.3 la successione  $\{y_n\}$  è monotona su  $S$  e converge a  $y$  poiché  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k, x) = y$ . Ne concludiamo che la traiettoria  $\varphi(t, x)$  si muove a spirale verso  $\gamma$ . ■

**Lemma 21.12** *Sia  $\gamma$  un ciclo limite per il sistema planare (21.1). Se  $\gamma = L_\omega(x)$  e  $y \in \gamma$ , sia  $S$  una sezione locale di  $f$  in  $y$  e sia  $\{y_k = \varphi(t_k, x)\}$  la successione di punti in cui la curva descritta dalla traiettoria  $\varphi(t, x)$  interseca  $S$ . Definiamo*

- $C_k := \{\varphi(t, x) : t_k \leq t \leq t_{k+1}\}$ ,
- $\mathcal{A}_k$  l'insieme compatto che ha come frontiera  $C_k$ ,  $\gamma$  e il segmento contenuto in  $S$  che unisce i due punti  $\varphi(t_k, x)$  e  $\varphi(t_{k+1}, x)$ ,
- $A_k := \mathcal{A}_k \setminus \partial \mathcal{A}_k$ .

Allora esiste  $k_0 \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $k > k_0$ , l'insieme  $A_k$  non contiene punti di equilibrio.

*Dimostrazione.* Poiché  $f(x) \neq 0 \forall x \in \gamma$ , se poniamo

$$a := \min_{x \in \gamma} |f(x)|, \quad (21.5)$$

si ha  $a > 0$ , poiché  $\gamma$  è compatto. Esiste allora  $\varepsilon > 0$  tale che per ogni punto  $z$  contenuto nell'insieme

$$B_\varepsilon(\gamma) := \bigcup_{y \in \gamma} B_\varepsilon(y) \quad (21.6)$$

si ha  $2a > |f(z)| > a/2$ . Dimostriamo per assurdo la stima dal basso (quella dall'alto si dimostra allo stesso modo). Se la stima non fosse soddisfatta, allora, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esisterebbe  $z \in B_\varepsilon(\gamma)$  con  $|f(z)| \leq a/2$ . Scegliendo un intero  $n_0 > 0$  e  $\varepsilon = \varepsilon_n = 1/n$ , al variare di  $n \in \mathbb{N}$ , con  $n > n_0$ , si determinerebbe una successione  $z_n \in \overline{B_{\varepsilon_{n_0}}(\gamma)}$ , tale che  $|f(z_n)| \leq a/2$ , da cui si potrebbe estrarre una sottosuccessione convergente  $\{z_{n_j}\}$ ; indicando con  $z_0$  il suo limite si avrebbe  $z_0 \in \gamma$  per costruzione e  $|f(z_0)| \leq a/2$  per continuità, in contraddizione con la (21.5).

Vogliamo ora dimostrare che esiste  $k_0 \in \mathbb{N}$  tale che per  $k > k_0$  la curva  $C_k$  è contenuta all'interno di  $B_\varepsilon(\gamma)$  (cfr. la figura 5.7). Per il lemma 21.5 possiamo scegliere  $\varepsilon > 0$  in modo che, fissati  $y \in \gamma$  e una sezione locale  $S$  di  $f$  in  $y$ , per ogni  $z \in B_\varepsilon(y)$  esista  $t(z)$  tale che  $\varphi(t(z), z) \in S$  con  $|t(z)| \leq \sigma$  per qualche  $\sigma > 0$ . Sia  $\delta \leq e^{-L(T+\sigma)}\varepsilon$ , dove  $L$  è la costante di Lipschitz di  $f|_{\overline{B_\varepsilon(\gamma)}}$  e  $T$  è il periodo della traiettoria che ha  $\gamma$  come orbita. Scegliamo  $k_0$  tale

che  $|y_k - y| < \delta$  per ogni  $k > k_0$ . Per il teorema della dipendenza continua dai dati iniziali (teorema 12.3), si ha

$$|\varphi(t, y_k) - \varphi(t, y)| \leq e^{Lt} |y_k - y| < e^{Lt} \delta \quad (21.7)$$

per ogni  $t \geq 0$  e ogni  $k > k_0$ . In particolare

$$|\varphi(T, y_k) - y| \leq |\varphi(T, y_k) - \varphi(T, y)| \leq e^{LT} |y_k - y| \leq e^{LT} \delta \leq e^{-L\sigma} \varepsilon < \varepsilon, \quad (21.8)$$

dove si è usato che, per definizione di  $T$ , si ha  $\varphi(T, y) = y$ . Ne segue in particolare che esiste  $\sigma_k \in [0, \sigma]$  tale che  $\varphi(T + \sigma_k, y_k) \in S$ ; per costruzione si ha  $T + \sigma_k = t_{k+1} - t_k$ , i.e.  $T + \sigma_k$  è il tempo necessario per andare da  $y_k = \varphi(t_k, x)$  a  $y_{k+1} = \varphi(t_{k+1}, x)$ . Dalla (21.7) si ottiene

$$|\varphi(t, y_k) - \varphi(t, y)| < e^{L(T+\sigma)} \delta < e^{L(T+\sigma)} e^{-L(T+\sigma)} \varepsilon = \varepsilon \quad (21.9)$$

per ogni  $t \in [0, T + \sigma_k]$ . Ora, la curva descritta da  $\varphi(t, y_k)$  per  $t \in [0, T + \sigma_k]$  non è altro che la curva  $C_k$  descritta da  $\varphi(t, x)$  per  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ . Per la (21.9) tale curva è interamente contenuta all'interno di  $B_\varepsilon(\gamma)$ , purché si abbia  $k > k_0$ . Quindi  $f(z) \neq 0 \forall z \in A_k$ , ovvero l'insieme  $A_k$  non contiene punti di equilibrio. ■

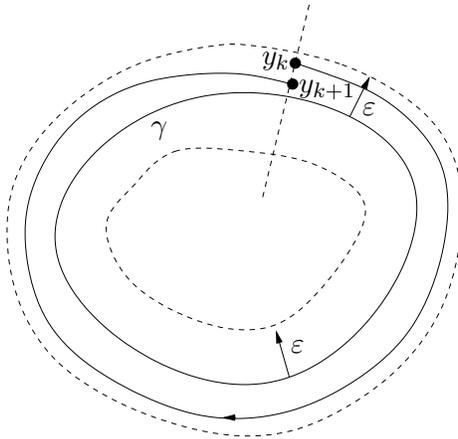


Figura 5.7: Costruzione grafica per la discussione del lemma 21.12.

**Osservazione 21.13** La dimostrazione del lemma 21.12 fa vedere che, prendendo  $k$  sufficientemente grande, si ha  $|f(x)| > a/2 \forall x \in A_k$ , se  $a$  è definito in (21.5).

**Proposizione 21.14** Sia  $\gamma$  un ciclo limite per il sistema planare (21.1) e sia  $T$  il periodo della traiettoria periodica che lo percorre; se  $\gamma = L_\omega(x)$  e  $y \in \gamma$ , sia  $S$  una sezione locale di  $f$  in  $y$  e sia  $\{y_k = \varphi(t_k, x)\}$  la successione di punti in cui la curva descritta dalla traiettoria  $\varphi(t, x)$  interseca  $S$ . Se definiamo  $T_k := t_{k+1} - t_k$ , esiste  $k_0 \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $k > k_0$  si ha

$$T_k = T + \sigma_k, \quad |\sigma_k| < C |y_k - y|, \quad (21.10)$$

per una costante  $C$  che non dipende da  $k$ .

*Dimostrazione.* Poiché  $T$  è il periodo della traiettoria che percorre l'orbita  $\gamma$ , si ha  $\varphi(T, y) = y$  se  $y \in \gamma$ . Introduciamo la successione  $\{\sigma_k\}$  scrivendo  $T_k = T + \sigma_k$ ; si ha allora

$$y_{k+1} = \varphi(t_{k+1}, x) = \varphi(t_k + T_k, x) = \varphi(T_k, \varphi(t_k, x)) = \varphi(T_k, y_k),$$

per costruzione. Si ha inoltre

$$y_{k+1} - y = \varphi(T_k, y_k) - \varphi(T, y) = \varphi(T_k, y_k) - \varphi(T, y_k) + \varphi(T, y_k) - \varphi(T, y), \quad (21.11)$$

dove (cfr. l'esercizio 1)

$$\varphi(T, y_k) = \varphi(T, y) + \int_0^1 ds D\varphi(T, y + s(y_k - y))(y_k - y), \quad (21.12)$$

se  $D\varphi(T, x)$  denota la matrice di elementi  $[\partial\varphi_i/\partial x_j](T, x)$ . Il vettore  $y + s(y_k - y)$  appartiene al segmento che unisce  $y$  a  $y_k$  lungo  $S$  e si ha

$$\left\| \int_0^1 ds D\varphi(T, y + s(y_k - y)) \right\| \leq M_0, \quad (21.13)$$

per qualche costante  $M_0$ , poiché  $\varphi$  è di classe  $C^1$  nei suoi argomenti. D'altra parte

$$\varphi(T_k, y_k) - \varphi(T, y_k) = \int_T^{T_k} ds \frac{d}{ds} \varphi(s, y_k) = \int_T^{T_k} ds f(\varphi(s, y_k)).$$

Per il lemma 21.12 si può scegliere  $k$  sufficientemente grande perché la traiettoria  $\varphi(t, x)$ , con  $t \geq t_k$ , sia contenuta in un insieme  $A_k$  in cui non ci siano punti di equilibrio. In particolare, se  $a$  è definito come in (21.5), si ha

$$\varphi(t, y_k) = \varphi(t_k + t, x) \implies \frac{a}{2} < |f(\varphi(t, y_k))| < 2a \quad \forall t \geq t_k,$$

per l'osservazione 21.13, così che

$$\frac{a|\sigma_k|}{2} \leq \left| \int_T^{T_k} ds f(\varphi(s, y_k)) \right| \leq 2a|\sigma_k|, \quad (21.14)$$

poiché  $\sigma_k = T_k - T$ . In conclusione si ha, per le (21.11), (21.12), (21.13) e (21.14),

$$\begin{aligned} \frac{a|\sigma_k|}{2} &\leq \left| \int_T^{T_k} ds f(\varphi(s, y_k)) \right| = |\varphi(T_k, y_k) - \varphi(T, y_k)| \\ &\leq |y_{k+1} - y| + |\varphi(T, y_k) - \varphi(T, y)| \leq |y_{k+1} - y| + M_0 |y_k - y|. \end{aligned}$$

Poiché  $|y_{k+1} - y| < |y_k - y|$ , segue la (21.10) con  $C = 2(M_0 + 1)/a$ . ■

**Lemma 21.15** *Sia  $\gamma$  un ciclo limite per il sistema dinamico planare (21.1). Se  $\gamma = L_\omega(x)$  allora esiste un intorno  $B(x)$  di  $x$  tale che  $\gamma = L_\omega(z)$  per ogni  $z \in B(x)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $y \in \gamma$ . Poiché  $y \in L_\omega(x)$ , esistono una sezione locale di  $f$  in  $y$ , una successione divergente  $\{t_k\}$  e un valore  $k_0 > 0$  tali che  $\varphi(t_k, x) \in S$  per  $k$  sufficientemente grande – in virtù della definizione di insieme  $\omega$ -limite e del lemma 21.5 (cfr. anche la dimostrazione del lemma 21.11). Consideriamo, per qualche  $k > k_0$ , scelto come nel lemma 21.12, la curva  $C_k := \{\varphi(t, x) : t_k \leq t \leq t_{k+1}\}$  e definiamo  $\mathcal{A}_k$  l'insieme compatto che ha come frontiera  $C_k$ ,  $\gamma$  e il segmento contenuto in  $S$  che unisce i due punti  $\varphi(t_k, x)$  e  $\varphi(t_{k+1}, x)$ . Sia  $A_k = \mathcal{A}_k \setminus \partial\mathcal{A}_k$ . L'insieme  $A_k$  è positivamente invariante (come lo è  $\mathcal{A}_k$ ) e aperto. Quindi, per ogni  $\bar{t} > t_{k+1}$ ,  $\varphi(\bar{t}, x) \in A_k$  ed è possibile scegliere un intorno  $B(\varphi(\bar{t}, x)) \subset A_k$ . Inoltre, per il lemma 21.12,  $A_k$  non contiene punti di equilibrio, purché  $k_0$  sia sufficientemente grande.

Tutte le traiettorie  $\varphi(t, z)$ , con  $z \in B(\varphi(\bar{t}, x))$ , tendono a  $\gamma$  per  $t \rightarrow +\infty$ . Infatti si ha  $\varphi(t, z) \in A_k \forall z \in B(\varphi(\bar{t}, x))$ , poiché  $A_k$  è positivamente invariante. Quindi  $L_\omega(z) \neq \emptyset$  (per il lemma 19.9) e  $L_\omega(z) \subset \overline{A_k} = \mathcal{A}_k$ . Poiché  $L_\omega(z)$  è chiuso (per il teorema 17.17) e limitato (poiché contenuto in  $A_k$ ), e inoltre non contiene punti di equilibrio, per quanto appena dimostrato, possiamo applicare il teorema 21.7 e concludere che  $L_\omega(z)$  è un'orbita chiusa  $\gamma_0$  contenuta in  $\mathcal{A}_k$ .

Mostriamo ora che se  $\gamma_0 \neq \gamma$  arriviamo a un assurdo. Se  $\gamma_0$  non racchiude  $\gamma$  al suo interno, ragioniamo come segue. Sia  $S$  una sezione locale di  $f$  in un punto  $y \in \gamma$ : se  $S$  intersecasse l'orbita  $\gamma_0$  allora dovrebbe intersecarla in due punti  $z_1$  e  $z_2$  tali che  $f(z_1)$  e  $f(z_2)$  abbiano versi opposti rispetto a  $S$ . D'altra parte questo non è possibile poiché  $S$  è una sezione locale. Se invece  $\gamma_0$  racchiudesse  $\gamma$  al suo interno, allora la traiettoria  $\varphi(t, x)$  non potrebbe muoversi a spirale verso  $\gamma$ , in quanto dovrebbe attraversare  $\gamma_0$ , violando il teorema di unicità (teorema 11.27) contro il fatto che  $\gamma = L_\omega(x)$ . In conclusione deve essere  $\gamma_0 = \gamma$ , i.e.  $L_\omega(z) = \gamma$ .

Per il teorema della dipendenza continua dai dati iniziali (teorema 12.3), l'intorno  $B(\varphi(T, x))$  è costituito da punti che partono da un insieme aperto  $U$  contenente  $x$ . Allora esiste un intorno  $B(x)$  di  $x$  contenuto in  $U$  tale che  $L_\omega(z) = \gamma$  per ogni  $z \in B(x)$ . ■

**Teorema 21.16** *Un insieme compatto positivamente o negativamente invariante  $K$  contiene almeno un punto di equilibrio o un'orbita chiusa.*

*Dimostrazione.* Consideriamo il caso in cui l'insieme  $K$  sia positivamente invariante (il caso in cui sia negativamente invariante si discute in modo analogo). Poiché  $K$  è compatto e positivamente invariante,  $L_\omega(x) \neq \emptyset$  per ogni  $x \in K$ , per il lemma 19.9. Poiché  $K$  è positivamente invariante,  $L_\omega(x) \subset K$ . Quindi  $L_\omega(x)$  è limitato (ed è chiuso per il teorema 17.17). Possiamo applicare allora il teorema 21.7. ■

**Teorema 21.17** *Sia  $\gamma$  un'orbita chiusa per il sistema dinamico planare (21.1). Allora l'insieme aperto  $U$  interno a  $\gamma$  contiene almeno un punto di equilibrio o un'orbita chiusa.*

*Dimostrazione.* Poiché l'insieme  $\overline{U}$  è compatto, si può applicare il teorema 21.16. Basterà dimostrare che non è possibile che  $\overline{U}$  non contenga punti di equilibrio e, allo stesso tempo, l'unica orbita chiusa in  $\overline{U}$  sia  $\gamma$  stessa.

Se questo succede  $\gamma$  deve essere un ciclo limite: infatti se  $U$  non contiene punti di equilibrio, allora, per ogni  $x \in U$ ,  $L_\omega(x)$  deve essere un'orbita chiusa per il teorema 21.7 e quindi  $L_\omega(x) = \gamma$  se  $\gamma$  è l'unica orbita chiusa in  $\bar{U}$ . Lo stesso tipo di ragionamento implica  $L_\alpha(x) = \gamma$ .

Poiché  $L_\omega(x) = L_\alpha(x) = \gamma$ , per ogni  $y \in \gamma$  esistono due successioni  $\{t_k\}$  e  $\{s_k\}$  tali che

- la successione  $\{t_k\}$  è crescente e  $t_k \rightarrow \infty$ , mentre la successione  $\{s_k\}$  è decrescente e  $s_k \rightarrow -\infty$ ,
- $\lim_{k \rightarrow \infty} |\varphi(t_k, x) - y| = 0$  e  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\varphi(s_k, x) - y| = 0$ .

Inoltre si possono scegliere  $\{t_k\}$  e  $\{s_k\}$  in modo tale che si abbia  $\varphi(t_k, x) \in S$  e  $\varphi(s_k, x) \in S$  per ogni  $k$ , se  $S$  è una sezione locale di  $f$  in  $y$  (cfr. la dimostrazione del lemma 21.11). Passando eventualmente a sottosuccessioni possiamo anche supporre che si abbia  $t_k > 0$  e  $s_k < 0$  per ogni  $k$ . Allora la successione  $\{\tau_k\}$  definita da

$$\dots, s_5, s_4, s_3, s_2, s_1, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, \dots$$

è crescente lungo la curva  $C$  individuata dalla traiettoria  $\varphi(t, x)$ , con  $t \in \mathbb{R}$ ; al contrario la successione dei punti  $\varphi(\tau_k, x)$  non è crescente lungo la sezione locale  $S$ , in contraddizione con il lemma 21.3. ■

Il teorema 21.17 può essere rafforzato dal seguente risultato.

**Teorema 21.18** *Sia  $\gamma$  un'orbita chiusa per il sistema dinamico planare (21.1). Allora l'insieme aperto  $U$  interno a  $\gamma$  contiene almeno un punto di equilibrio.*

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che  $U$  non contenga nessun punto di equilibrio. Allora, per il teorema 21.17, esiste un'orbita chiusa  $\gamma_1$  contenuta in  $U$ ; sia  $U_1$  l'insieme racchiuso da  $\gamma_1$ . Riapplicando il teorema 21.17 iterativamente possiamo concludere che esiste una successione di orbite chiuse  $\{\gamma_n\}$  tali che, se indichiamo con  $U_n$  gli insiemi racchiusi da tali orbite, si ha  $U_{n+1} \subset U_n$  per ogni  $n \geq 1$ , con l'inclusione che vale in senso stretto.

Consideriamo una successione convergente di punti  $x_n \in \gamma_n$  e sia  $x$  il suo limite (se  $x_n$  non converge se ne può estrarre una sottosuccessione, utilizzando la compattezza di  $\bar{U}$ ). Allora deve esistere un'orbita chiusa  $\beta$  tale che  $x \in \beta$ , come si può dimostrare ragionando per assurdo. Supponiamo infatti che la traiettoria passante per  $x$  non abbia luogo su un'orbita chiusa: allora essa dovrebbe muoversi a spirale verso un ciclo limite  $\gamma_0$ . Infatti sarebbe  $L_\omega(x) \neq \emptyset$  per il fatto che  $\bar{U}$  è compatto e invariante (cfr. il lemma 19.9) e  $L_\omega(x)$  dovrebbe essere un'orbita chiusa  $\gamma_0$  per il teorema 21.7 (poiché stiamo supponendo che  $U$  non contenga punti di equilibrio): se  $x \notin L_\omega(x)$  allora  $\gamma_0 = L_\omega(x)$  sarebbe un ciclo limite. D'altra parte, per il lemma 21.15, tutte le traiettorie con dati iniziali all'interno di un opportuno intorno  $B(x)$  di  $x$  dovrebbero muoversi a spirale anch'esse verso lo stesso ciclo limite, i.e.  $\gamma_0 = L_\omega(z) \forall z \in B(x)$ , e di conseguenza lo stesso dovrebbero fare le traiettorie dei punti  $x_n$  a partire da un certo valore di  $n$  (i.e. dei

punti  $x_n \in B(x)$ ), contro l'ipotesi che si avesse  $x_n \in \gamma_n$ . Questo completa la dimostrazione che  $x$  è contenuto in un'orbita chiusa.

Quindi esiste un'orbita chiusa  $\beta$  che non contiene né punti di equilibrio (lo stiamo supponendo) né orbite chiuse (per costruzione). Questo contraddice il teorema 21.17. ■

**Teorema 21.19** *Sia  $H$  una costante del moto di classe  $C^1$  del sistema planare (21.1). Se  $H$  non è identicamente costante su alcun insieme aperto, allora non ci sono né cicli limite né punti di equilibrio asintoticamente stabili.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che esista un ciclo limite  $\gamma$ . Poiché  $H$  è una costante del moto, per ogni  $y \in \gamma$ ,  $H(\varphi(t, y))$  assume sempre lo stesso valore, che indichiamo con  $H_\gamma$ . Poiché  $H$  è continua, per ogni  $x$  tale che  $\gamma = L_\omega(x)$ , si ha  $\lim_{k \rightarrow \infty} H(\varphi(t_k, x)) = H_\gamma$ , per qualche successione monotona divergente  $\{t_k\}$ . Ma  $H$  deve assumere sempre lo stesso valore sulla traiettoria  $\varphi(t, x)$ , quindi  $H(\varphi(t, x)) = H_\gamma$ . Per il lemma 21.15, esiste un intorno  $B(x)$  tale che  $\gamma = L_\omega(z)$  per ogni  $z \in B(x)$ . Per ciascuno di tali punti possiamo ripetere il ragionamento precedente e concludere che  $H(z) = H_\gamma$  per ogni  $z \in B(x)$ . Questo contraddice l'ipotesi che  $H$  non sia identicamente costante su alcun insieme aperto.

Il caso dei punti di equilibrio asintoticamente stabili si tratta in modo analogo. Se  $x_0$  è asintoticamente stabile esiste un intorno  $B(x_0)$  tale che  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, z) = x_0$  per ogni  $z \in B(x_0)$ . Si avrebbe allora, come nel caso precedente,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} H(\varphi(t, z)) = H(x_0)$  per ogni  $z \in B(x_0)$  e quindi, poiché  $H$  è una costante del moto, segue che  $H(z) = H(x_0)$  per ogni  $z \in B(x_0)$ , contro l'ipotesi su  $H$ . ■

**Osservazione 21.20** La condizione che  $H$  non sia identicamente costante su alcun insieme aperto è soddisfatta, per esempio, se  $H$  ha punti stazionari isolati.

Per il teorema 21.7, gli insiemi limite compatti di un sistema planare che non contengano punti di equilibrio sono orbite chiuse. Sia  $\gamma$  una di tali orbite: se esistono punti  $z \notin \gamma$  tali che  $\gamma = L_\omega(z)$ , allora  $\gamma$  è un ciclo limite; altrimenti possiamo solo dire che la traiettoria che si svolge su  $\gamma$  è periodica. Può infatti succedere che una data regione del piano sia interamente costituita da orbite chiuse, senza che per altro esistano cicli limite. Per esempio questo si verifica per sistemi meccanici conservativi, o, più in generale, per sistemi dinamici in cui esista una costante del moto che non sia identicamente nulla su alcun aperto, come mostra il seguente risultato.

**Teorema 21.21** *Sia  $H$  una costante del moto di classe  $C^1$  del sistema planare (21.1) tale che essa non sia identicamente costante su alcun insieme aperto. Se esiste un insieme aperto  $U$  che sia racchiuso all'interno di una componente connessa chiusa di una curva di livello di  $H$  e contenga un unico punto di equilibrio stabile  $x_0$ , allora ogni traiettoria  $\varphi(t, \bar{x})$ , con  $\bar{x} \in U \setminus \{x_0\}$ , è periodica e si svolge su un'orbita che contiene  $x_0$  al suo interno.*

*Dimostrazione.* Sia  $\bar{x}$  un punto arbitrario in  $U \setminus \{x_0\}$  (cfr. la figura 5.8) e sia  $\varphi(t, \bar{x})$  la traiettoria con dato iniziale  $\bar{x}$ . Poiché  $\bar{U}$  è compatto e invariante,  $L_\omega(\bar{x})$  è non vuoto ed è contenuto in  $\bar{U}$  (cfr. il lemma 19.9).

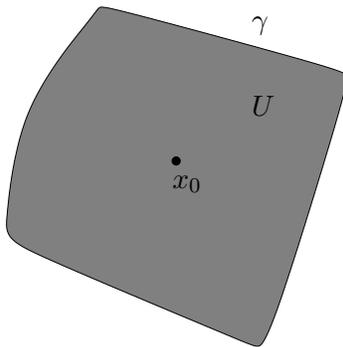


Figura 5.8: Discussione del teorema 21.21. La regione ombreggiata è racchiusa all'interno di una componente connessa di una curva di livello e contiene un punto di equilibrio stabile al suo interno.

Notiamo in primo luogo che  $L_\omega(\bar{x})$  non può essere contenuto in  $\gamma = \partial U$ : infatti, se  $H_\gamma$  è il valore che  $H$  assume su  $\gamma$ , poiché  $H$  è una costante del moto, si avrebbe  $H(\varphi(t, \bar{x})) = H_\gamma$ , i.e.  $\varphi(t, \bar{x})$  dovrebbe appartenere alla curva di livello  $\gamma$ , contro l'ipotesi. Quindi  $L_\omega(\bar{x})$  è contenuto in  $U \setminus \gamma$ .

Inoltre  $L_\omega(\bar{x})$  non può contenere il punto di equilibrio stabile  $x_0$ , come si può vedere ragionando per assurdo. Se  $x_0$  appartenesse a  $L_\omega(\bar{x})$ , si avrebbe  $L_\omega(\bar{x}) = \{x_0\}$  e  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, \bar{x}) = x_0$ , per il lemma 19.6. Sia  $\varepsilon > 0$  tale che  $\bar{x} \notin B_\varepsilon(x_0)$ , e sia  $z \in B_\delta(x_0)$ , con  $\delta$  tale che  $\varphi(t, z) \in B_\varepsilon(x_0)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  (per la stabilità di  $x_0$  tale  $\delta$  esiste). Si ha  $L_\omega(z) \neq \emptyset$  sempre per il lemma 19.9. Si dovrebbe allora avere  $x_0 \in L_\omega(z)$ . Infatti se così non fosse, dal momento che  $x_0$  è l'unico punto di equilibrio contenuto in  $U$ , l'insieme  $L_\omega(z)$  dovrebbe essere un'orbita chiusa per il teorema 21.7, contenuta in  $B_\varepsilon(x_0)$  per costruzione, e dovrebbe racchiudere  $x_0$  al suo interno per il teorema 21.18. Indicando con  $\mathcal{C}$  tale orbita, la traiettoria  $\varphi(t, \bar{x})$  dovrebbe allora intersecare la traiettoria che ha luogo sulla curva chiusa  $\mathcal{C}$ , contro il teorema di unicità (teorema 11.27). Avremmo quindi trovato  $x_0 \in L_\omega(z)$ . D'altra parte il discorso varrebbe per ogni  $z \in B_\delta(x_0)$ . Allora esisterebbe  $\delta > 0$  tale che per ogni  $z \in B_\delta(x_0)$  si avrebbe  $L_\omega(z) = \{x_0\}$  e  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, z) = x_0$ , i.e.  $x_0$  sarebbe attrattivo. Poiché  $x_0$  è stabile per ipotesi,  $x_0$  dovrebbe quindi essere asintoticamente stabile. Questo è però in contraddizione con il teorema 21.19.

In conclusione  $L_\omega(\bar{x})$  non può contenere  $x_0$ . Deve quindi essere un'orbita chiusa per il teorema 21.7, poiché  $L_\omega(\bar{x})$  è compatto e, per ipotesi,  $x_0$  è l'unico punto di equilibrio in  $U$ . Se fosse  $\bar{x} \notin L_\omega(\bar{x})$  allora  $L_\omega(\bar{x})$  sarebbe un ciclo limite (cfr. la definizione 21.10), ma per il teorema 21.19 possiamo escludere l'esistenza di cicli limite all'interno di  $\bar{U}$ . Quindi si deve

avere  $\bar{x} \in L_\omega(\bar{x})$ , ovvero  $L_\omega(\bar{x})$  deve essere l'orbita della traiettoria  $\varphi(t, \bar{x})$ . La traiettoria  $\varphi(t, \bar{x})$  è perciò periodica. Infine l'orbita chiusa percorsa dalla traiettoria deve contenere  $x_0$  al suo interno per il teorema 21.18. ■

**Teorema 21.22** *Sia  $H$  una costante del moto di classe  $C^1$  del sistema planare (21.1) tale che essa non sia identicamente costante su alcun insieme aperto. Se esiste un insieme (aperto)  $U$  che sia racchiuso all'interno di due componenti connesse chiuse  $\gamma_+$  e  $\gamma_-$  (con  $\gamma_-$  interna a  $\gamma_+$ ) di una curva di livello di  $H$  e non contenga punti di equilibrio, allora ogni traiettoria  $\varphi(t, \bar{x})$ , con  $\bar{x} \in U$ , è periodica e si svolge su un'orbita che racchiude al suo interno la componente connessa  $\gamma_-$  della curva di livello.*

*Dimostrazione.* Si ragiona come per la dimostrazione del teorema 21.21, sostituendo a  $x_0$  l'insieme vuoto  $\emptyset$  (cfr. la figura 5.9). L'orbita deve racchiudere al suo interno la componente  $\gamma_-$ , dal momento che deve contenere un punto di equilibrio al suo interno (per il teorema 21.18) e, per ipotesi, non esistono punti di equilibrio in  $U$ . ■

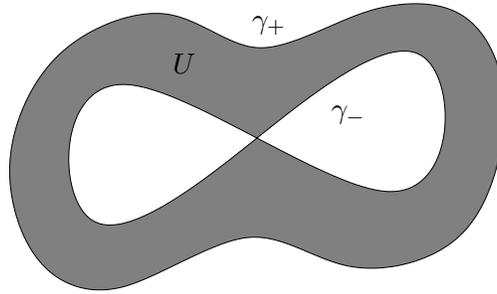


Figura 5.9: Scenario previsto nella discussione del teorema 21.22. La regione ombreggiata è racchiusa tra due componenti connesse di una curva di livello e non contiene punti di equilibrio al suo interno.

**Osservazione 21.23** Dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad (21.15)$$

se esiste una funzione  $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$  tale che

$$f_1(x) = \frac{\partial}{\partial x_2} H(x), \quad f_2(x) = -\frac{\partial}{\partial x_1} H(x), \quad (21.16)$$

con  $x = (x_1, x_2)$ , allora  $H$  è una costante del moto: infatti

$$\dot{H} = \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial H}{\partial x_2} \dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial H}{\partial x_2} - \frac{\partial H}{\partial x_2} \frac{\partial H}{\partial x_1} = 0.$$

D'altra parte se è noto *a priori* che esiste una costante del moto  $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  per il sistema dinamico (21.15), non è detto che la (21.16) debba essere soddisfatta. In generale possiamo soltanto concludere che esiste una funzione  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  tale che

$$f_1(x) = g(x) \frac{\partial}{\partial x_2} H(x), \quad f_2(x) = -g(x) \frac{\partial}{\partial x_1} H(x). \quad (21.17)$$

Infatti se  $\dot{H} = 0$  si ha allora  $\dot{H} = \langle \nabla H, \dot{x} \rangle = 0$ , così che  $\nabla H$  deve essere ortogonale a  $\dot{x}$ , i.e. deve essere proporzionale al vettore

$$\left( -\frac{\partial}{\partial x_2} H(x), \frac{\partial}{\partial x_1} H(x) \right),$$

con costante di proporzionalità che può dipendere dal punto  $x$ , che è appunto la condizione (21.17).

**Esempio 21.24** Consideriamo il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = e^x y^2, \\ \dot{y} = -e^x xy. \end{cases} \quad (21.18)$$

Si vede immediatamente che  $H(x, y) = x^2 + y^2$  è una costante del moto. D'altra parte il campo vettoriale  $f(x, y)$  che definisce il sistema dinamico (21.18) è della forma (21.17), con  $g(x, y) = e^x y$ : in particolare non esiste alcuna funzione  $H$  tale che  $f_1 = \partial H / \partial y$  e  $f_2 = -\partial H / \partial x$ , come è facile verificare. Si veda l'esercizio 30 per uno studio qualitativo del sistema (21.18).

## §22 Sistemi gradiente

Nel presente paragrafo analizzeremo alcuni sistemi notevoli in cui il campo vettoriale si può scrivere come gradiente di una funzione scalare.

**Definizione 22.1** (SISTEMA GRADIENTE). *Un sistema dinamico (17.1) si dice sistema gradiente se esiste una funzione  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$  tale che*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = -\nabla V(x). \quad (22.1)$$

**Definizione 22.2** (PUNTO REGOLARE) *Diremo che il punto  $x$  è un punto regolare per il sistema gradiente (22.1) se  $\nabla V(x) \neq 0$ .*

Indicheremo con  $\Sigma_c$  la superficie di dimensione  $n-1$  definita da  $\Sigma_c = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) = c\}$ , con  $c \in \mathbb{R}$ :  $\Sigma_c$  è la *superficie di livello* di  $V$  corrispondente al valore  $c$ .

**Lemma 22.3** (PROPRIETÀ DEI SISTEMI GRADIENTE) *Dato il sistema gradiente (22.1), si ha*