$\Longrightarrow p < -\alpha(p) < p_0 \Longrightarrow \delta(-\alpha(p)) > 0 \Longrightarrow -p_0 < \alpha(-\alpha(p)) < -p \Longrightarrow p < \beta(\alpha(p)) < p_0$, poiché $\beta(\alpha(p)) = -\alpha(-\alpha(p))$ (cfr. la soluzione dell'esercizio 71) $\Longrightarrow \sigma(p) > p$. In modo analogo si trova che se $p > p_0$ allora $\sigma(p) < p$. Il ragionamento sopra mostra che, se $p \neq p_0$, la successione di punti $\sigma^n(p)$ in cui $\varphi(t,p)$ attraversa v_+ è strettamente monotona – crescente se $p < p_0$ e decrescente se $p > p_0$. Poiché tale successione è anche limitata (dal momento che $p_0 < \sigma(p) < p$ se $p > p_0$ e $p_0 > \sigma(p) > p$ se $p < p_0$), deve convergere (cfr. l'esercizio 7 del capitolo 1). Sia p_1 il suo limite: si ha allora $p_1 \in L_\omega(p)$, ma per il teorema di Poincaré-Bendixson (teorema 21.7) $L_\omega(p)$ deve essere un'orbita chiusa, quindi $\sigma(p_1) = p_1$. D'altra parte l'unico punto fisso di σ è p_0, quindi $p_1 = p_0$. Ne segue che che $L_\omega(p) = \gamma$ per ogni $p \in v_+ \setminus \{p_0\}$. In conclusione, comunque si scelga un dato iniziale che non sia punto di equilibrio né appartenga alla curva γ, la traiettoria corrispondente si muove a spirale verso la curva γ.

Esercizio 73 Il *modello SIR epidemico* è un modello epidemiologico compartimentale che studia il diffondersi di una malattia in una popolazione suddivisa in tre sottogruppi (o *compartimenti*): *suscettibili* (i.e individui sani che possono contrarre la malattia), *infetti* (i.e. individui che sono malati) e *rimossi* (i.e. individui che, dopo aver contratto la malattia, sono guariti o deceduti). L'evoluzione della malattia è regolata dalle seguenti ipotesi:

- la popolazione è costante: si trascurano nascite e decessi per altre ragioni;
- ogni individuo può essere infettato una sola volta e, se questo accade, diviene subito contagioso;
- la velocità con cui i suscettibili si infettano è proporzionale al numero di incontri tra suscettibili e infetti, e quindi al prodotto del numero di suscettibili per il numero di infetti;
- gli infetti, da una parte, aumentano con velocità proporzionale al numero di incontri tra suscettibili e infetti, dall'altra, diminuiscono proporzionalmente al loro numero per il naturale decorso della malattia, che porta alla guarigione o al decesso;
- la velocità con cui un individuo infetto diventa rimosso è proporzionale al numero di infetti.

Indichiamo con S, I e R il numero di suscettibili, infetti e rimossi, rispettivamente; si ha $S, I, R \geq 0$. L'evoluzione del sistema descritto dal modello SIR epidemico è determinata dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta IS, \\ \dot{I} = \beta IS - \gamma I, \\ \dot{R} = \gamma I, \end{cases}$$

dove β e γ sono costanti positive: β prende il nome di *tasso di infezione* e γ di *tasso di rimozione*. Se si pone $\beta = \beta_0/N$, dove $N := S + I + R$ rappresenta la popolazione totale (ovvero il numero totale di individui), le costanti β_0 e γ sono costanti universali, i.e. indipendenti dal valore di N. Si verifichi che effettivamente N è una costante del moto e che l'ottante $\{(S, I, R) \in \mathbb{R}^3 : S, I, R \geq 0\}$ è invariante. [*Suggerimento.* Si ha $\dot{N} = \dot{S} + \dot{I} + \dot{R} = -\beta SI + \beta SI - \gamma I + \gamma I = 0$. Le prime due equazioni del sistema descrivono un sistema dinamico planare in cui R non compare: se $S = 0$ si ha $\dot{S} = 0$ e $\dot{I} < 0$, quindi lungo il semiasse I positivo ci si muove verso l'origine; se $I = 0$ si ha $\dot{S} = \dot{I} = 0$, quindi il semiasse S positivo, essendo costituito interamente da punti di equilibrio, non può essere attraversato. Infine, se $I \geq 0$, si ha $\dot{R} \geq 0$, quindi se $I(0), R(0) \geq 0$, si ha $R(t) \geq 0$ per ogni t per cui $R(t)$ è definita.]

Esercizio 74 Si determinino i punti di equilibrio del modello SIR epidemico (cfr. l'esercizio 73) e se ne calcoli la stabilità al variare dei parametri γ e β_0. [*Soluzione.* I punti di equilibrio sono i punti $P = (S_0, I_0, R_0)$ in corrispondenza dei quali si annulla il campo vettoriale. Si ha $\dot{I} = 0$ se $I = 0$ oppure se $\beta S = \gamma$. Dei due valori solo il primo annulla $\dot{S}$ e $\dot{R}$. Quindi sono punti di equilibrio tutti i punti della forma $P = (S_0, 0, R_0)$, con $R_0 = N - S_0$ ed S_0 arbitrario. Per studiarne la stabilità si calcola la matrice jacobiana del sistema linearizzato:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\beta S_0 & 0 \\ 0 & \beta S_0 - \gamma & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è dato da $p_3(\lambda) = \lambda^2(\beta S_0 - \gamma - \lambda)$, così che, se $\beta S_0 = \gamma$, si ha un unico autovalore $\lambda = 0$ con molteplicità 3, mentre, se $\beta S_0 \neq \gamma$, si ha un autovalore $\lambda = 0$ con molteplicità 2 e un autovalore $\lambda = \beta S_0 - \gamma$ con molteplicità 1. Se $\beta S_0 > \gamma$ il punto di equilibrio è instabile per il teorema 18.7. Se $\beta S_0 \leq \gamma$, l'analisi del sistema linearizzato non permette di trarre alcuna conclusione per il sistema non lineare. Si può allora ragionare come segue. Si consideri il *sistema ridotto* descritto dalle prime due equazioni:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta I S, \\ \dot{I} = \beta I S - \gamma I. \end{cases}$$

I punti di equilibrio hanno la forma $(S_0, 0)$. Sia $S_c := \gamma/\beta$. Se $S_0 = 0$, comunque si prenda un dato iniziale $(\bar{S}, \bar{I}) \in \mathbb{R}_+^2$ tale che $0 \leq \bar{S}, \bar{I} < \delta$, si ha $0 \leq S(t), I(t) < \delta$ $\forall t \geq 0$, dal momento che risulta $S, I \geq 0$ e $\dot{S}, \dot{I} \leq 0$ per $S < S_c$: quindi l'origine è un punto di equilibrio stabile per il sistema ridotto. Se $0 < S_0 \leq S_c$, si consideri il semidisco

$$D_\delta := \{(S, I) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \leq I < \delta, \, |S - S_0| < \delta\},$$

con $\delta < S_0$, e si ponga

$$D_\delta^+ := \{(S, I) \in D_\delta : S \geq S_0\}, \qquad D_\delta^- := \{(S, I) \in D_\delta : S < S_0\}, \qquad W(S, I) := (S - S_0)^2 + I^2.$$

Si verifica facilmente che tutte le traiettorie con dati iniziali in D_δ^+ o rimangono in D_δ^+ o entrano in D_δ^- in un tempo finito. Infatti, se $(\bar{S}, \bar{I}) \in D_\delta^+$, si ha, fin tanto che la soluzione rimane in D_δ^+,

$$\begin{aligned} \dot{W} &= 2\left((S - S_0)(-\beta I S) + I(\beta I S - \gamma I)\right) = -2\beta (S_0 - S) I S + 2\beta I^2 (S - S_c) \\ &\leq -2\beta I S (S - S_0) + 2\beta I^2 (S - S_0) = -2\beta I S (S_0 - S)(S - I) \leq 0, \end{aligned}$$

dal momento che si ha $S_c \geq S_0$ ed $S \geq S_0 > \delta > I$ all'interno di D_δ^+, così che la soluzione, se esce da D_δ^+, deve attraversare la retta $S = S_0$; se quando questo succede si ha $I \neq 0$, allora $\dot{S} > 0$ e la traiettoria entra in D_δ^-. Poiché $\dot{I} < 0$ per $S < S_0 \leq S_c$, qualsiasi traiettoria con dato iniziale $(\bar{S}, \bar{I}) \in D_\delta^-$ rimane sempre all'interno del compatto $\{(S, I) \in \mathbb{R}_+^2 : I \leq \delta, \, S \leq S_0\}$ e quindi è definita per ogni $t \geq 0$ (per il corollario 13.13). Dimostriamo ora che qualsiasi traiettoria con dato iniziale in D_δ^- rimane sempre all'interno del semidisco D_{3d}, con $d := \sqrt{S_0 \delta}$. Poiché $\dot{S}, \dot{I} < 0$, dimostriamo innanzitutto che si ha $S(t) > S_0 - 2d$ per ogni $t \geq 0$. Se $2d \geq S_0$ non c'è nulla da dimostare. Se invece $2d < S_0$, supponiamo per assurdo che esista un tempo t_2 tale $S(t_2) = S_0 - 2d$. Per continuità, poiché $\bar{S} \geq S_0 - \delta > S_0 - d$, esiste $t_1 \in (0, t_2)$ tale che $S(t_1) = S_0 - d$. Per $t \in [t_1, t_2]$ la seconda equazione del sistema dà $\dot{I} \leq \beta(S_0 - d - S_c) I \leq -\beta d I$, che, integrata, implica

$$I(t) \leq \mathrm{e}^{-\beta d (t - t_1)} I(t_1) \leq \mathrm{e}^{-\beta d (t - t_1)} \delta \qquad \forall t \in [t_1, t_2].$$

La prima equazione si può riscrivere $\dot{S}/S = -\beta I$, che, integrata, dà

$$\log S(t_2) - \log S(t_1) = -\beta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, I(t) \geq -\beta \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \mathrm{e}^{-\beta d (t - t_1)} \delta \geq -\delta/d,$$

da cui si ottiene

$$S(t_2) \geq \mathrm{e}^{-\delta/d} S(t_1) \geq (1 - \delta/d)(S_0 - d) \geq S_0 - d - \frac{S_0 \delta}{d} + \delta > S_0 - 2d,$$

arrivando quindi a una contraddizione. Pertanto, se $(\bar{S}, \bar{I}) \in D_\delta$, si ha $|S(t) - S_0| < 2d$, $I(t) < \delta < d$ e, di conseguenza, $(S - S_0)^2 + I^2 < (3d)^2$, i.e. $(S(t), I(t)) \in D_{3d}$, per ogni $t \geq 0$. Se ne conclude che, fissato $\varepsilon > 0$, se scegliamo $\delta := \varepsilon^2/9S_0$ si trova $(S(t), I(t)) \in D_\varepsilon$ per ogni dato iniziale $(\bar{S}, \bar{I}) \in D_\delta$, da cui segue la stabilità di $(S_0, 0)$ per il sistema ridotto. Tornando al sistema completo, tenendo conto che si ha $S(t) + I(t) + R(t) = N$ per ogni t, si trova

$$|R(t) - R_0| \leq |(N - S(t) - I(t)) - (N - S_0)| \leq |S(t) - S_0| + I < 2d + \delta < 3d,$$

da cui segue che si ha $(S - S_0)^2 + I^2 + (R - R_0)^2 < 2(3d)^2 < (5d)^2$, e quindi, fissato $\varepsilon > 0$ e scelto $\delta := \varepsilon^2/25S_0$, si ha $(S(t), I(t), R(t)) \in B_\varepsilon(P) \cap \mathbb{R}^3_+$ per ogni dato iniziale $(\bar{S}, \bar{I}, \bar{R}) \in B_\delta(P) \cap \mathbb{R}^3_+$, dove $P = (S_0, 0, N - S_0)$ e $B_r(P)$ è l'intorno di raggio r e centro P in $\mathbb{R}^3$ (cfr. l'esercizio 11 del capitolo 1). In conclusione i punti di equilibrio $(S_0, 0, N - S_0)$ sono instabili se $S_0 > S_c = \gamma/\beta$ e stabili se $S_0 \leq S_c$. Si noti che i punti di equilibrio stabili non sono asintoticamente stabili, dal momento che, già per il sistema ridotto, tutti i punti del semiasse S positivo sono punti di equilibrio.]

Esercizio 75 In riferimento al modello SIR epidemico descritto nell'esercizio 73 si studi il comportamento del sistema dinamico corrispondente. Si dimostri in particolare che, se si vuole ridurre il numero di infetti, occorre che il valore del parametro S_c introdotto nell'esercizio 74 sia il più grande possibile, e si interpreti il risultato. [*Suggerimento.* Nel quadrante $S, I \geq 0$ del sistema ridotto (cfr. la soluzione dell'esercizio 74) si considerino le due regioni

$$\begin{aligned} A &= \{(S, I) \in \mathbb{R}^2 : S < S_c, I > 0\}, \\ B &= \{(S, I) \in \mathbb{R}^2 : S > S_c, I > 0\}, \end{aligned}$$

e si indichi con r la semiretta $S = S_c, I > 0$ che le separa (cfr. la figura 5.37).

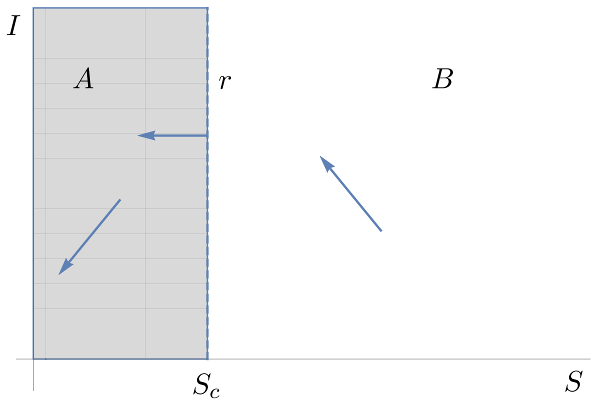

Figura 5.37: Direzione del campo vettoriale negli insiemi A, B e r per il modello SIR.

Si verifica facilmente, a partire dalle equazioni del sistema, che risulta

$$\begin{aligned} &\dot{S} < 0, \quad \dot{I} < 0, \qquad (S, I) \in A, \\ &\dot{S} < 0, \quad \dot{I} = 0, \qquad (S, I) \in r, \\ &\dot{S} < 0, \quad \dot{I} > 0, \qquad (S, I) \in B. \end{aligned}$$

Si dimostra allora che tutte le traiettorie che partono da B entrano in A in un tempo finito attraversando r e che tutte le traiettorie che partono da A tendono a punti di equilibrio stabili, ragionando come segue. Sia $(\bar{S},\bar{I})$ un dato iniziale in B. Si ha $I(t) \geq \bar{I}$ fin tanto che la soluzione è definita e rimane in B. Si ha corrispondentemente $\dot{S} \leq -\beta\bar{I}S$ e quindi $S(t) \leq \mathrm{e}^{-\beta\bar{I}t}\bar{S}$: esiste quindi un tempo finito t_1 tale che $S(t_1) = S_c$, ovvero $(S(t_1), I(t_1)) \in r$. Poiché $\dot{S}(t_1) > 0$ e $\dot{I}(t_1) = 0$, per $t > t_1$ la traiettoria entra in A. Sia ora $(\bar{S},\bar{I})$ un dato iniziale in A. Si ha $S(t) \leq \bar{S}$ fin tanto che la soluzione è definita; poiché inoltre $I(t) \leq \bar{I}$ in A, la soluzione rimane sempre dentro il compatto $\{(S,I) \in \mathbb{R}_+^2 : S \leq \bar{S},\, I \leq \bar{I}\}$ e quindi è definita per ogni $t \geq 0$. Si ha inoltre $\dot{I} \leq -\alpha I$, con $\alpha := \beta(S_c - \bar{S}) > 0$, da cui si deduce $I(t) \leq \mathrm{e}^{-\alpha t}\bar{I}$, che, introdotta nella prima equazione, dà

$$\frac{\dot{S}}{S} = -\beta I \quad \Longrightarrow \quad \log S(t) \geq \log \bar{S} - \beta \int_0^t \mathrm{d}s\, I(s) \geq \log \bar{S} - \frac{\beta}{a} \quad \Longrightarrow \quad S(t) \geq \mathrm{e}^{-\beta/\alpha}\bar{S}.$$

Questo, unito al fatto che $\dot{S}(t) < 0$, implica che $S(t)$ tende a un valore limite $\mathcal{S}(\bar{S},\bar{I}) \in (0,\bar{S})$. Inoltre $I(t) \to 0$ per $t \to +\infty$, quindi $(S(t), I(t))$ tende al punto di equilibrio $(\mathcal{S}(\bar{S},\bar{I}), 0)$. La situazione è rappresentata nella figura 5.38. Poiché si ha $S(t)+I(t)+R(t) = N$ per ogni $t \geq 0$, $R(t) \to N - \mathcal{S}(\bar{S},\bar{I})$,

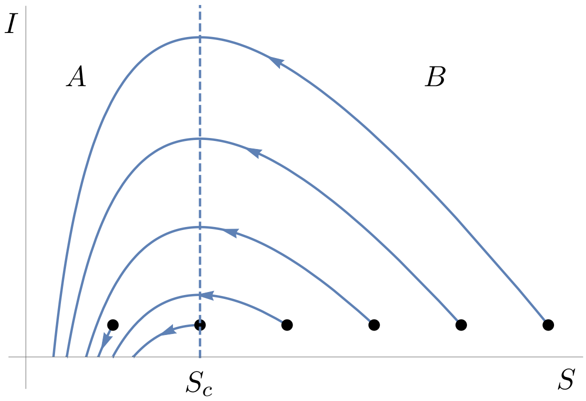

Figura 5.38: Traiettorie del sistema ridotto per il modello SIR al variare di $\bar{S}$.

con il dato iniziale $\bar{R}$ fissato univocamente da $\bar{S}$ e $\bar{I}$, poiché risulta $\bar{S} + \bar{I} + \bar{R} = N$. Tipicamente si ha $\bar{R} = 0$, mentre $\bar{I} > 0$ è piccolo rispetto a N, così che $\bar{S} = N - \bar{I} \approx N$. Indipendentemente dal dato iniziale la traiettoria tende a un punto di equilibrio stabile. Se $\bar{S}$ è molto più grande di S_c, la malattia evolve in modo tale che $I(t)$ a un certo punto diventa molto grande (cfr. la figura 5.38, per $\bar{S} \gg S_c$), evidenziando che la maggior parte della popolazione prima o poi contrae la malattia, e alla fine $S(t)$ tende a un valore molto piccolo, mentre il valore limite di $R(t)$ è corrispondentemente grande: la maggior parte degli infetti sono o guariti o deceduti. Al contrario, se $\bar{S} \leq S_c$ (di fatto anche se S è poco più grande di S_c), il numero di infetti rapidamente decade e il numero di suscettibili diminuisce un po', con i pochi infetti iniziali – se $\bar{I}$ è piccolo – che guariscono o muoiono (cfr. la figura 5.38, per $\bar{S} \leq S_c$). Per avere una diffusione contenuta della malattia, occorre che il valore di S_c sia il più grande possibile (così che $\bar{S}$ sia minore di S_c). Dal momento che S_c è proporzionale a γ/β_0, è quindi importante che β_0 sia piccolo (riducendo i contatti tra infetti ed evitando gli assembramenti) e che γ sia grande (offrendo buone prestazioni mediche e garantendo interventi tempestivi).]

Esercizio 76 Nel modello SIR epidemico (cfr. l'esercizio 73), R conta il numero di rimossi, senza distinguere tra guariti e deceduti. Il *modello SIRD epidemico*, al contrario separa i guariti, che continuiamo a indicare con R, dai *deceduti*, che indichiamo con D. Le equazioni del sistema sono allora modificate nel modo seguente:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta IS, \\ \dot{I} = \beta IS - \gamma I - \phi I, \\ \dot{R} = \gamma I, \\ \dot{D} = \phi I, \end{cases}$$

dove β e γ sono definiti come nell'esercizio 73, mentre ϕ è il *tasso di letalità*. Si studi il comportamento del sistema. [*Suggerimento.* Si verifica facilmente (cfr. l'esercizio 73) che $N = S+I+R+D$ è costante e l'insieme $\{(S,I,R,D) \in \mathbb{R}^4 : S,I,R,D \geq 0\}$ è invariante. Le prime due equazioni costituiscono un sistema (sistema ridotto) nel piano (S,I), che può essere studiato come per il modello SIR nell'esercizio 75: l'unica differenza è che ora il parametro γ è sostituito da una nuovo parametro $\gamma' := \gamma + \phi$. In particolare i punti di equilibrio sono ancora della forma $(S_0, 0)$ e sono stabili se $S_0 \leq S_c := (\gamma + \phi)/\beta$ e instabili se $S_0 > S_c$. Inoltre, ponendo $\bar{R} = R(0)$ e $\bar{D} = D(0)$, si ha

$$R(t) = \bar{R} + \gamma \int_0^t \mathrm{d}s\, I(s), \qquad D(t) = \bar{D} + \phi \int_0^t \mathrm{d}s\, I(s),$$

dove gli integrali convergono dal momento che $I(t)$ decade almeno esponenzialmente. Quindi, fissato un dato iniziale $(\bar{S}, \bar{I}, \bar{R}, \bar{D})$, dove tipicamente $\bar{R} = \bar{D} = 0$ e $\bar{I}$ è piccolo, si ha $S(t) \to \mathcal{S}(\bar{S}, \bar{I})$, $I(t) \to 0$, $R(t) \to \mathcal{R}(\bar{S}, \bar{I})$ e $D(t) \to \mathcal{D}(\bar{S}, \bar{I})$, dove $\mathcal{S}(\bar{S}, \bar{I})$, $\mathcal{R}(\bar{S}, \bar{I})$ e $\mathcal{D}(\bar{S}, \bar{I}) = N - \mathcal{S}(\bar{S}, \bar{I}) - \mathcal{R}(\bar{S}, \bar{I})$, sono opportune funzioni dei valori iniziali di S e I. Si noti che, se $\bar{R} = \bar{D} = 0$, si ha $D(t)/R(t) = \phi/\gamma$ $\forall t \geq 0$, quindi il rapporto tra il numero di deceduti e il numero di guariti dipende da quanto grande è il tasso di letalità rispetto al tasso di rimozione.]

Esercizio 77 Il modello SIR epidemico (cfr. l'esercizio 73) descrive la diffusione di una malattia limitata nel tempo, destinata a scomparire, il cui effetto finale è che gli individui infettati o guariscono o muoiono. Può tuttavia succedere che la malattia perduri nel tempo e divenga epidemica, senza esaurire i suoi effetti; in tal caso il numero degli infetti può tendere a un valore finale non nullo. Occorre inoltre tener conto delle nascite e delle morti indipendenti dalla malattia, ed eventualmente della vaccinazione di parte della popolazione. Il *modello SIR epidemico* descrive una variante del modello SIR epidemico, in cui si includono tali aspetti. Le ipotesi diventano allora:

- ogni individuo può essere infettato una sola volta;
- la popolazione è costante nel tempo, in quanto il tasso di natalità e di morte sono uguali;
- il tasso di morte in ogni compartimento è proporzionale al numero di individui del compartimento, con la stessa costante di proporzionalità;
- gli infetti sono immediatamente contagiosi;
- la velocità con cui i suscettibili si infettano è proporzionale al numero di incontri tra suscettibili e infetti, e quindi al prodotto del numero di suscettibili per il numero di infetti;
- la velocità con cui gli infetti aumentano è proporzionale al numero di incontri tra suscettibili e infetti, con un minimo necessario perché la malattia si possa diffondere e diminuita a causa delle morti indipendenti dalla malattia;