

Esercizio 76 Nel modello SIR epidemico (cfr. l'esercizio 73), R conta il numero di rimossi, senza distinguere tra guariti e deceduti. Il modello *SIRD epidemico*, al contrario separa i guariti, che continuiamo a indicare con R , dai *deceduti*, che indichiamo con D . Le equazioni del sistema sono allora modificate nel modo seguente:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta IS, \\ \dot{I} = \beta IS - \gamma I - \phi I, \\ \dot{R} = \gamma I, \\ \dot{D} = \phi I, \end{cases}$$

dove β e γ sono definiti come nell'esercizio 73, mentre ϕ è il *tasso di letalità*. Si studi il comportamento del sistema. [*Suggerimento*. Si verifica facilmente (cfr. l'esercizio 73) che $N = S + I + R + D$ è costante e l'insieme $\{(S, I, R, D) \in \mathbb{R}^4 : S, I, R, D \geq 0\}$ è invariante. Le prime due equazioni costituiscono un sistema (sistema ridotto) nel piano (S, I) , che può essere studiato come per il modello SIR nell'esercizio 75: l'unica differenza è che ora il parametro γ è sostituito da un nuovo parametro $\gamma' := \gamma + \phi$. In particolare i punti di equilibrio sono ancora della forma $(S_0, 0)$ e sono stabili se $S_0 \leq S_c := (\gamma + \phi)/\beta$ e instabili se $S_0 > S_c$. Inoltre, ponendo $\bar{R} = R(0)$ e $\bar{D} = D(0)$, si ha

$$R(t) = \bar{R} + \gamma \int_0^t ds I(s), \quad D(t) = \bar{D} + \phi \int_0^t ds I(s),$$

dove gli integrali convergono dal momento che $I(t)$ decade almeno esponenzialmente. Quindi, fissato un dato iniziale $(\bar{S}, \bar{I}, \bar{R}, \bar{D})$, dove tipicamente $\bar{R} = \bar{D} = 0$ e \bar{I} è piccolo, si ha $S(t) \rightarrow \mathcal{S}(\bar{S}, \bar{I})$, $I(t) \rightarrow 0$, $R(t) \rightarrow \mathcal{R}(\bar{S}, \bar{I})$ e $D(t) \rightarrow \mathcal{D}(\bar{S}, \bar{I})$, dove $\mathcal{S}(\bar{S}, \bar{I})$, $\mathcal{R}(\bar{S}, \bar{I})$ e $\mathcal{D}(\bar{S}, \bar{I}) = N - \mathcal{S}(\bar{S}, \bar{I}) - \mathcal{R}(\bar{S}, \bar{I})$, sono opportune funzioni dei valori iniziali di S e I . Si noti che, se $\bar{R} = \bar{D} = 0$, si ha $D(t)/R(t) = \phi/\gamma \forall t \geq 0$, quindi il rapporto tra il numero di deceduti e il numero di guariti dipende da quanto grande è il tasso di letalità rispetto al tasso di rimozione.]

Esercizio 77 Il modello SIR epidemico (cfr. l'esercizio 73) descrive la diffusione di una malattia limitata nel tempo, destinata a scomparire, il cui effetto finale è che gli individui infettati o guariscono o muoiono. Può tuttavia succedere che la malattia perduri nel tempo e divenga epidemica, senza esaurire i suoi effetti; in tal caso il numero degli infetti può tendere a un valore finale non nullo. Occorre inoltre tener conto delle nascite e delle morti indipendenti dalla malattia, ed eventualmente della vaccinazione di parte della popolazione. Il modello *SIR epidemico* descrive una variante del modello SIR epidemico, in cui si includono tali aspetti. Le ipotesi diventano allora:

- ogni individuo può essere infettato una sola volta;
- la popolazione è costante nel tempo, in quanto il tasso di natalità e di morte sono uguali;
- il tasso di morte in ogni compartimento è proporzionale al numero di individui del compartimento, con la stessa costante di proporzionalità;
- gli infetti sono immediatamente contagiosi;
- la velocità con cui i suscettibili si infettano è proporzionale al numero di incontri tra suscettibili e infetti, e quindi al prodotto del numero di suscettibili per il numero di infetti;
- la velocità con cui gli infetti aumentano è proporzionale al numero di incontri tra suscettibili e infetti, con un minimo necessario perché la malattia si possa diffondere e diminuita a causa delle morti indipendenti dalla malattia;

- la velocità con cui un individuo infetto diventa rimosso è proporzionale al numero di infetti, di nuovo diminuita a causa delle morti indipendenti dalla malattia;
- in caso di vaccinazione, una parte dei suscettibili passa direttamente nella categoria dei rimossi.

Indicando ancora con S , I e R il numero di suscettibili, infetti e rimossi, rispettivamente, l'evoluzione del sistema descritto dal modello SIR endemico è determinata dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta IS - \mu S + (1 - \rho)\mu N, \\ \dot{I} = \beta IS - \gamma I - \mu I, \\ \dot{R} = \gamma I - \mu R + \rho\mu N, \end{cases}$$

dove β , γ , μ e ρ sono costanti positive, denominate *tasso di infezione*, *tasso di rimozione*, *tasso di natalità e di morte*, e *tasso di vaccinazione*, rispettivamente, e $N := S + I + R$ rappresenta la popolazione totale. Ovviamente $\rho \in [0, 1]$: se $\rho > 0$ si ha il modello SIR endemico *con vaccinazione*, mentre il caso $\rho = 0$ corrisponde al modello SIR endemico *senza vaccinazione*. Se si definisce $\beta_0 := \beta N$, le costanti β_0 , γ e μ sono indipendenti da N . Si verifichi che effettivamente N è costante e che l'ottante $\{(S, I, R) \in \mathbb{R}^3 : S, I, R \geq 0\}$ è invariante. [Suggerimento. Si ha $\dot{N} = -\beta IS - \mu S + \mu N - \rho\mu N + \beta IS - \gamma I - \mu I + \gamma I - \mu R + \rho\mu N = 0$. Se $S = 0$ e $I, R \geq 0$ si ha $\dot{S} \geq 0$; se invece $I = 0$ e $S, R \geq 0$ si ha $\dot{I} = 0$; se infine $R = 0$ e $S, I \geq 0$ si ha $\dot{R} \geq 0$.]

Esercizio 78 Si determinino i punti di equilibrio del modello SIR endemico (cfr. l'esercizio 77) e se ne calcoli la stabilità al variare dei parametri γ , β_0 , μ e ρ , nel caso in cui l'analisi lineare sia sufficiente. Si dimostri in particolare che, definendo $\mathfrak{R}_0 := (1 - \rho)\beta_0/(\gamma + \mu)$, si ha per $\mathfrak{R}_0 = 1$ una *biforcazione*: un punto di equilibrio perde stabilità, che viene trasferita a un punto di equilibrio formatosi *ex novo*. [Soluzione. I punti di equilibrio sono i punti $P = (S_0, I_0, R_0)$ in corrispondenza dei quali si annulla il campo vettoriale. Si ha $\dot{I} = 0$ se $I = 0$ oppure se $\beta S = \gamma + \mu$. Se $I = 0$, si trova $S = S_1 := (1 - \rho)N$ e $R = R_1 := \rho N$; se invece $S = S_2 := (\gamma + \mu)/\beta$ si ha $I = I_2$ e $R = R_2$, dove

$$I_2 := \frac{(1 - \rho)N\mu}{\gamma + \mu} - \frac{\mu}{\beta} = \frac{\mu}{\beta_0} \left(\frac{(1 - \rho)\beta_0}{\gamma + \mu} - 1 \right) N, \quad R_2 := \frac{\gamma}{\beta_0} \left(\frac{(1 - \rho)\beta_0}{\gamma + \mu} - 1 \right) N + \rho N,$$

con $\beta_0 = \beta N$. Se introduciamo il parametro

$$\mathfrak{R}_0 := \frac{(1 - \rho)\beta_0}{\gamma + \mu},$$

possiamo riscrivere i due punti di equilibrio nella forma

$$P_1 = ((1 - \rho)N, 0, \rho N), \quad P_2 = (S_2, I_2, R_2) = \left(\frac{\gamma + \mu}{\beta_0} N, \frac{\mu}{\beta_0} (\mathfrak{R}_0 - 1) N, \frac{\gamma}{\beta_0} (\mathfrak{R}_0 - 1) N + \rho N \right).$$

Si noti che P_2 è definito solo se $\mathfrak{R}_0 \geq 1$ e coincide con P_1 per $\mathfrak{R}_0 = 1$. Per studiare la stabilità dei punti di equilibrio, conviene studiare il sistema ridotto per (S, I) , i.e.

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta IS - \mu S + (1 - \rho)\mu N, \\ \dot{I} = \beta IS - \gamma I - \mu I, \end{cases}$$

in cui N è una costante e non compare R , e dedurre poi R dalla legge di conservazione $N = S + I + R$. I punti di equilibrio del sistema ridotto sono $Q_1 = ((1 - \rho)N, 0)$ e $Q_2 = (S_2, I_2)$. La matrice jacobiana J del sistema linearizzato, per Q_1 , è data da

$$J = J(Q_1) := \begin{pmatrix} -\mu & -\beta_0(1 - \rho) \\ 0 & \beta_0(1 - \rho) - \gamma - \mu \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è dato da $p_2(\lambda) = (\lambda + \mu)(\beta_0(1 - \rho) - \gamma - \mu - \lambda)$, così che si hanno i due autovalori $\lambda_1 = -\mu$ e $\lambda_2 = \beta_0(1 - \rho) - \gamma - \mu = (\gamma + \mu)(\mathfrak{R}_0 - 1)$. Se $\mathfrak{R}_0 > 1$, l'autovalore λ_2 è positivo e P_1 è un punto di equilibrio instabile (per il teorema 18.7); se $\mathfrak{R}_0 < 1$ tutti e due gli autovalori sono negativi e il punto di equilibrio è asintoticamente stabile (per il teorema 18.5); se invece $\mathfrak{R}_0 = 1$, l'analisi lineare non consente di concludere. Per Q_2 , quando $\mathfrak{R}_0 > 1$, si trova

$$J = J(Q_2) := \begin{pmatrix} -\beta I_2 - \mu & -\beta S_2 \\ \beta I_2 & 0 \end{pmatrix},$$

così che il polinomio caratteristico è $p_2(\lambda) = \lambda^2 + (\beta I_2 + \mu)\lambda + \beta^2 S_2 I_2$, da cui si ottengono gli autovalori

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}(\mu\mathfrak{R}_0 + \Delta), \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}(\mu\mathfrak{R}_0 - \Delta), \quad \Delta := \sqrt{\mu^2\mathfrak{R}_0^2 - 4\mu(\gamma + \mu)(\mathfrak{R}_0 - 1)},$$

che o sono negativi o hanno comunque la parte reale negativa; per il teorema 18.5 il punto di equilibrio Q_2 , quando esiste, è asintoticamente stabile. Si ha una pertanto una biforcazione per $\mathfrak{R}_0 = 1$: quando \mathfrak{R}_0 , aumentando, attraversa tale valore, Q_1 , che era asintoticamente stabile, diventa instabile, e si forma un nuovo punto di equilibrio Q_2 , che eredita la stabilità asintotica di Q_1 . Tornando al sistema completo, fissato N , il moto avviene sulla superficie bidimensionale, di fatto un piano, individuata dall'equazione $S + I + R = N$, e, a seconda del valore di \mathfrak{R}_0 , per i moti confinati su tale superficie i due punti di equilibrio P_1 e P_2 risultano instabili o asintoticamente stabili a seconda che lo siano i punti Q_1 e Q_2 per il sistema ridotto. Nello spazio della fasi tridimensionale (S, I, R) , i punti di equilibrio instabili continuano a essere tali, mentre i punti di equilibrio che sono asintoticamente stabili per i moti sulle superfici in cui N è fissato sono solo stabili per i moti in \mathbb{R}_+^3 (consistentemente con il teorema 21.19, che esclude l'esistenza di punti di equilibrio asintoticamente stabili in sistemi che ammettano una costante del moto). La stabilità di P_1 , per $\mathfrak{R}_0 < 1$, o di P_2 , per $\mathfrak{R}_0 > 1$, si dimostra osservando che, comunque preso un dato iniziale $\bar{x} := (\bar{S}, \bar{I}, \bar{R})$ sufficientemente vicino al punto di equilibrio, esso si trova su un piano π in cui $\bar{N} := \bar{S} + \bar{I} + \bar{R}$ assume un valore vicino a N , e quindi la traiettoria corrispondente tende a un punto P del piano π le cui coordinate differiscono da quelle di P_1 o di P_2 in quanto N è sostituito da \bar{N} . Ne segue che le traiettorie con dati iniziali vicini ai punti di equilibrio rimangono vicini: se x_0 sono le coordinate del punto di equilibrio (i.e. $x_0 = (S_1, I_1, R_1)$ per P_1 e $x_0 = (S_2, I_2, R_2)$ per P_2) e x_1 sono le coordinate che si ottengono sostituendo N con \bar{N} , comunque sia fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|\bar{x} - x_0| < \delta$ si ha $|\varphi(t, \bar{x}) - x_1| < \varepsilon/2 \forall t \geq 0$ (perché la traiettoria che parte da \bar{x} tende asintoticamente a x_1) e $|x_1 - x_0| < \varepsilon/2$ (perché i punti di equilibrio dipendono con continuità da N), e quindi $|\varphi(t, \bar{x}) - x_0| \leq |\varphi(t, \bar{x}) - x_1| + |x_1 - x_0| < \varepsilon$ non appena si richieda $|\bar{x} - x_0| < \delta$.

Esercizio 79 Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio del modello SIR endemico nel caso in cui l'analisi lineare non sia conclusiva (cfr. l'esercizio 78). [Soluzione. Dalla discussione dell'esercizio 78 segue che l'unico caso da trattare è il caso in cui si abbia $\mathfrak{R}_0 = 1$. In tal caso si considera il sistema ridotto nel piano (S, I) , le cui le equazioni diventano

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta IS - \mu(S - S_1), \\ \dot{I} = \beta I(S - S_1), \end{cases}$$

con $S_1 = (1 - \rho)N$. Nel quadrante $S, I \geq 0$ del sistema ridotto si considerino le tre regioni

$$\begin{aligned} A &= \{(S, I) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq S < S_1, 0 < I < \mathcal{I}(S)\}, \\ B &= \{(S, I) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq S < S_1, I > \mathcal{I}(S)\}, \\ C &= \{(S, I) \in \mathbb{R}^2 : S > S_1, I > 0\}, \end{aligned}$$

dove

$$\mathcal{I}(S) := \frac{\mu}{\beta} \left(\frac{S_1}{S} - 1 \right),$$

e si indichino con $r_- = \{(S, I) \in \mathbb{R}_+^2 : S \in (0, S_1), I = \mathcal{I}(S)\}$ e $r_+ = \{(S, I) \in \mathbb{R}_+^2 : S = S_1\}$ le curve che separano, rispettivamente, A da B e B da C . Si verifica facilmente, a partire dalle equazioni del sistema, che risulta (cfr. la figura 5.39)

$$\begin{aligned} \dot{S} &> 0, & \dot{I} &< 0, & (S, I) &\in A, \\ \dot{S} &= 0, & \dot{I} &< 0, & (S, I) &\in r_-, \\ \dot{S} &< 0, & \dot{I} &< 0, & (S, I) &\in B, \\ \dot{S} &< 0, & \dot{I} &= 0, & (S, I) &\in r_+, \\ \dot{S} &< 0, & \dot{I} &> 0, & (S, I) &\in C. \end{aligned}$$

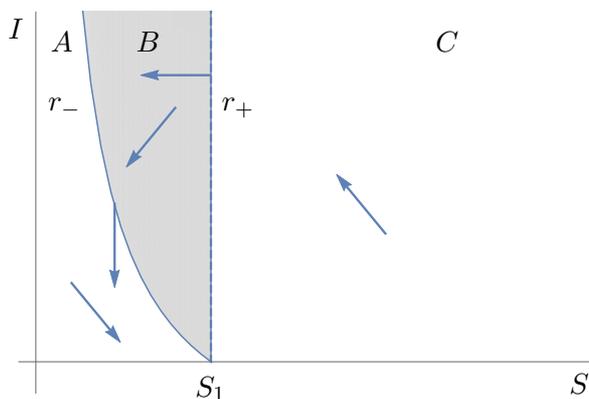


Figura 5.39: Direzione del campo vettoriale per il modello SIR endemico per $\mathfrak{R}_0 = 1$.

Le traiettorie che partono da C entrano in A in un tempo finito attraversando r_+ , quelle che partono da B entrano tutte in A in un tempo finito attraversando r_- , e, infine, quelle che partono da A tendono tutte a $(S_1, 0)$ in un tempo infinito: questo si dimostra come segue (cfr. la figura 5.40).

- Se $(\bar{S}, \bar{I}) \in C$, si ha $I(t) \geq \bar{I}$ e quindi $\dot{S} \leq -\beta \bar{I} S - \mu(S - S_1) \leq -\beta \bar{I} S$ fin tanto che la soluzione rimane in C . Integrando si trova $S(t) \leq e^{-\beta \bar{I} t} \bar{S}$: esiste pertanto un tempo finito t_1 in cui $S(t_1) = S_1$. Inoltre si ha $\dot{S}(t_1) < 0$, quindi per $t > t_1$ la traiettoria entra in B .
- Se $(\bar{S}, \bar{I}) \in B$, la soluzione è definita per ogni $t \geq 0$, dal momento che rimane in un compatto, e si ha $S(t) \leq \bar{S}$ e quindi $\dot{I} \leq -\beta(S_1 - \bar{S})$, che integrata, dà $I(t) \leq e^{-\beta(S_1 - \bar{S})t} \bar{I}$: esiste pertanto un tempo finito t_2 tale che $I(t_2)$ attraversa r_- e, poiché si ha $\dot{I}(t_2) < 0$, essa entra in A .
- Se $(\bar{S}, \bar{I}) \in A$, la soluzione è di nuovo definita per ogni $t \geq 0$, e si ha $S(t) \geq \bar{S}$ e $0 < I(t) < \mathcal{I}(S(t)) \forall t \geq 0$. Poiché $\dot{S}(t) > 0$ e $S(t) < S_1$, si ha $S(t) \rightarrow S_1$ per $t \rightarrow +\infty$: il limite esiste perché $S(t)$ è crescente e non può essere diverso da S_1 perché altrimenti $\dot{S}(t)$ si annullerebbe (cfr. l'esercizio 39 del capitolo 4) in un punto $(S, 0)$ con $S \neq S_1$, il che non è possibile. Poiché $\mathcal{I}(S_1) = 0$ ne segue che $I(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$.

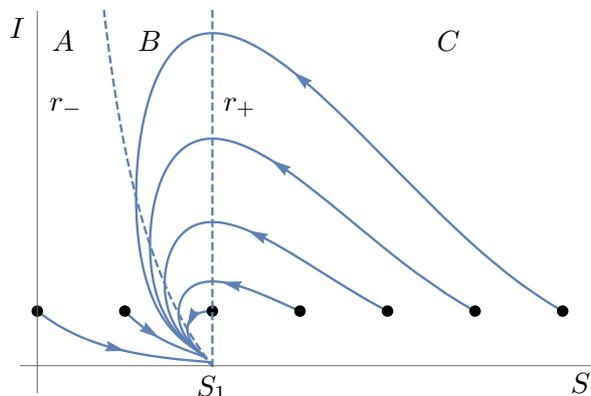


Figura 5.40: Traiettorie del sistema ridotto per il modello SIR endemico al variare di \bar{S} per $\mathfrak{R}_0 = 1$.

Infine, se $\bar{I} = 0$, si ha $\dot{I} = 0$, mentre $\dot{S} > 0$ se $\bar{S} < S_1$ e $\dot{S} < 0$ se $\bar{S} > S_1$. Dalla discussione precedente segue che, se $\mathfrak{R}_0 = 1$, tutte le soluzioni del sistema ridotto tendono al punto di equilibrio $(S_1, 0)$. Dalla conservazione di N si evince che anche $R(t)$ tende al valore asintotico $R_1 = N - S_1$. In conclusione, $P_1 = (S_1, 0, R_1)$ è asintoticamente stabile per i moti che si svolgono sull'intersezione del piano $S + I + R = N$ con il primo ottante, i.e. in $\mathcal{Q}_N := \{(S, I, R) \in \mathbb{R}_+^3 : S + I + R = N\}$, e il suo bacino di attrazione è l'intero insieme \mathcal{Q}_N . In altre parole, P_1 è globalmente attrattivo in \mathcal{Q}_N (ma non lo è in \mathbb{R}_+^3 , come discusso nell'esercizio 79 nel caso $\mathfrak{R}_0 \neq 1$).]

Esercizio 80 Si dimostri che nel modello SIR endemico non esistono traiettorie periodiche. [Soluzione. Per $\mathfrak{R} = 0$ il risultato segue dall'esercizio 79. Se $\mathfrak{R}_0 < 1$ si ragiona in modo analogo. Se invece $\mathfrak{R}_0 > 1$, dividendo il primo quadrante del sistema ridotto nelle quattro regioni (cfr. la figura 5.41)

$$\begin{aligned} A &= \{(S, I) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq S < S_2, 0 < I < \mathcal{I}(S)\}, \\ B &= \{(S, I) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq S < S_2, I > \mathcal{I}(S)\}, \\ C &= \{(S, I) \in \mathbb{R}^2 : S_2 < S < S_1, I > \mathcal{I}(S)\} \cup \{(S, I) \in \mathbb{R}^2 : S \geq S_1, I > 0\}, \\ D &= \{(S, I) \in \mathbb{R}^2 : S_2 < S < S_1, I < \mathcal{I}(S)\}, \end{aligned}$$

dove $S_1 = (1 - \rho)N$, $S_2 = (\gamma + \beta)/\beta$ con $S_2 < S_1$ per $\mathfrak{R}_0 > 1$, e $\mathcal{I}(S) = (\mu/\beta)((S/S_1) - 1)$ (cfr. la soluzione dell'esercizio 78), si osserva che si ha (cfr. la figura 5.41)

$$\begin{aligned} \dot{S} > 0, \quad \dot{I} < 0, & \quad (S, I) \in A, \\ \dot{S} < 0, \quad \dot{I} < 0, & \quad (S, I) \in B, \\ \dot{S} < 0, \quad \dot{I} > 0, & \quad (S, I) \in C, \\ \dot{S} > 0, \quad \dot{I} > 0, & \quad (S, I) \in D. \end{aligned}$$

Inoltre sulla curva $\mathcal{C}_0 := \{(S, I) \in \mathbb{R}_+^2 : S \in (0, S_1), I = \mathcal{I}(S)\}$, che separa A da B per $S < S_2$ e C da D per $S > S_2$, si ha $\dot{S} = 0$ e $\dot{I} > 0$ se $S > S_2$, $\dot{I} < 0$ se $S < S_2$, mentre sulla semiretta positiva $S = S_2$, che separa B da C per $I > I_2$ e A da D per $I < I_2$, si ha $\dot{I} = 0$ e $\dot{S} < 0$ se $I > I_2$, $\dot{S} > 0$ se $I < I_2$. Supponiamo per assurdo che esista una traiettoria periodica. Essa, perché si possa chiudere, deve descrivere un'orbita \mathcal{C} che contiene il punto d'equilibrio (S_2, I_2) al suo interno (cfr. anche il teorema

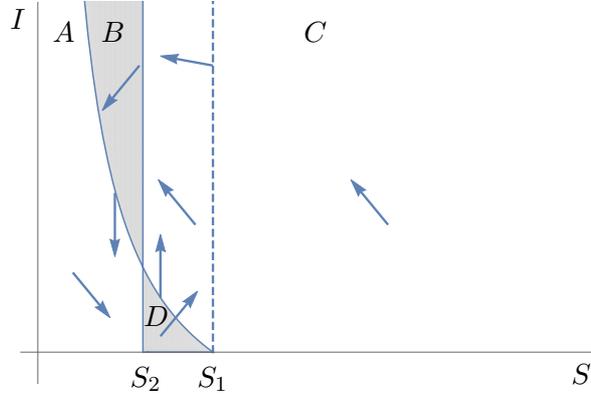


Figura 5.41: Direzione del campo vettoriale per il modello SIR endemico per $\mathfrak{R}_0 > 1$.

21.18); sia \mathcal{D} l'insieme compatto racchiuso da \mathcal{C} . Siano (S_-, I_-) e (S_+, I_+) , con $S_- < S_2 < S_+$, i punti in cui \mathcal{C} attraversa la curva \mathcal{C}_0 . In corrispondenza del primo punto si ha $\dot{S} = 0, \dot{I} < 0$, mentre in corrispondenza del secondo si ha $\dot{S} = 0, \dot{I} > 0$. La curva \mathcal{C} è quindi costituita da due rami \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 , tali che

$$\mathcal{C}_1 := \{(S, I) \in \mathbb{R}_+^2 : S_- \leq S \leq S_+, I = I_-(S)\}, \quad \mathcal{C}_2 := \{(S, I) \in \mathbb{R}_+^2 : S_- \leq S \leq S_+, I = I_+(S)\},$$

dove $I_\pm(S)$ sono due opportune funzioni, con $I_-(S) < I_+(S) \forall S \in (S_-, S_+)$ e $I_-(S_\pm) = I_+(S_\pm)$. Sia T_1 il tempo necessario perché la soluzione descriva l'arco di curva \mathcal{C}_1 e T_2 il tempo necessario perché essa descriva l'arco di curva \mathcal{C}_2 ; ovviamente $T := T_1 + T_2$ rappresenta il periodo della traiettoria. Per ogni funzione $\Phi_1(S, I)$ derivabile per $S, I > 0$, si ha,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} dS dI \frac{\partial \Phi_1}{\partial I}(S, I) &= \int_{S_-}^{S_+} dS \int_{I_-(S)}^{I_+(S)} dI \frac{\partial \Phi_1}{\partial I}(S, I) = \int_{S_-}^{S_+} dS \left(\Phi_1(S, I_+(S)) - \Phi_1(S, I_-(S)) \right) \\ &= - \int_0^{T_1} dt \dot{S}(t) \Phi_1(S(t), I(t)) - \int_{T_1}^T dt \dot{S}(t) \Phi_1(S(t), I(t)) = - \int_0^T dt \dot{S}(t) \Phi(S(t), I(t)), \end{aligned}$$

dove, nell'operare la sostituzione negli integrali, si è tenuto conto che, lungo \mathcal{C}_1 , si ha $\dot{S}(t) > 0$ e $I_-(S(t)) = I(t)$, con $t \in [0, T_1]$, e, lungo \mathcal{C}_2 , si ha $\dot{S}(t) < 0$ e $I_+(S(t)) = I(t)$, con $t \in [T_1, T_2]$. La curva \mathcal{C} può anche essere suddivisa in due rami \mathcal{C}_3 e \mathcal{C}_4 , tali che, usando ora le notazioni (S_-, I_-) e (S_+, I_+) per indicare i punti in cui \mathcal{C} attraversa la retta $S = S_2$,

$$\mathcal{C}_3 := \{(S, I) \in \mathbb{R}_+^2 : I_- \leq I \leq I_+, S = S_-(I)\}, \quad \mathcal{C}_4 := \{(S, I) \in \mathbb{R}_+^2 : I_- \leq I \leq I_+, S = S_+(I)\},$$

dove $S_\pm(I)$ sono due opportune funzioni, con $S_-(I) < S_+(I) \forall I \in (I_-, I_+)$ e $S_-(I_\pm) = S_+(I_\pm)$. Ragionando come prima si trova, per ogni funzione $\Phi_2(S, I)$ derivabile per $S, I > 0$,

$$\int_{\mathcal{D}} dS dI \frac{\partial \Phi_2}{\partial S}(S, I) = \int_{I_-}^{I_+} dI \int_{S_-(I)}^{S_+(I)} dS \frac{\partial \Phi_2}{\partial S}(S, I) = \int_0^T dt \dot{I}(t) \Phi_2(S(t), I(t)).$$

Si scelga

$$\begin{aligned}\Phi_1(S, I) &:= \Phi_0(S, I) (\beta IS - \gamma I - \mu I) = \Phi_0(S, I) \dot{I}, \\ \Phi_2(S, I) &:= \Phi_0(S, I) (-\beta IS - \mu S + (1 - \rho)\mu N) = \Phi_0(S, I) \dot{S},\end{aligned}$$

con $\Phi_0(S, I) := 1/I$, così da ottenere

$$\int_{\mathcal{D}} dS dI \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial S}(S, I) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial I}(S, I) \right) = \int_0^T dt \Phi_0(S(t), I(t)) \left(\dot{I}(t) \dot{S}(t) - \dot{S}(t) \dot{I}(t) \right) = 0.$$

D'altra parte, calcolando esplicitamente le derivate, si trova

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial S}(S, I) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial I}(S, I) = -\beta - \frac{\mu}{I} < 0 \implies \int_{\mathcal{D}} dS dI \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial S}(S, I) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial I}(S, I) \right) < 0,$$

portando a una contraddizione. Notiamo incidentalmente che l'argomento dato costituisce il teorema di Green (cfr. la nota bibliografica).]

Esercizio 81 Si studi qualitativamente il moto del modello SIR endemico al variare del parametro \mathfrak{R}_0 introdotto nell'esercizio 77, e si dia un'interpretazione fisica dei risultati. [Suggerimento. Per $\mathfrak{R}_0 = 1$, l'andamento qualitativo delle soluzioni è discusso nell'esercizio 78. Se $\mathfrak{R}_0 < 1$, si ragiona in modo simile: di nuovo si trova che, fissato N , il moto si svolge sull'intersezione \mathcal{Q}_N del piano $S + I + R = N$ con il primo ottante, e, limitandosi a dati iniziali in \mathcal{Q}_N , P_1 è asintoticamente stabile e \mathcal{Q}_N ne costituisce il bacino di attrazione. Se $\mathfrak{R}_0 > 1$, si divide il primo quadrante come indicato nella soluzione dell'esercizio 80. Ragionando come nella soluzione dell'esercizio 79, si vede facilmente che le traiettorie con dati iniziali in B e in D entrano rispettivamente in A e in C in un tempo finito. Inoltre si vede che le traiettorie che partono da C devono necessariamente o entrare in B o raggiungere il punto (S_2, I_2) , dove $I_2 = \mathcal{I}(S_2)$: infatti non possono né chiudersi, perché non esistono traiettorie periodiche (cfr. l'esercizio 80), né allontanarsi indefinitamente verso l'alto, perché S diminuisce almeno esponenzialmente fin tanto che la soluzione rimane in D (si ragioni come nell'esercizio 78). Analogamente, le traiettorie che partono da A o entrano in D o tendono a (S_2, I_2) . In linea di principio una traiettoria può attraversare indefinitamente la semiretta $S = S_2, I > I_2$, ma, ad ogni attraversamento, si deve avvicinare al punto (S_2, I_2) : infatti, per il lemma 21.3, la successione dei punti in cui la traiettoria attraversa la semiretta è monotona e, non contenendo essa altri punti di equilibrio, i punti di attraversamento devono allontanarsi all'infinito, ma questo non è possibile dal momento che si ha $S(t) \leq N$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. In conclusione tutte le traiettorie con dati iniziali (\bar{S}, \bar{I}) tali che $\bar{S} \geq 0$ e $\bar{I} > 0$ tendono al punto asintoticamente stabile (S_2, I_2) . Al contrario le traiettorie con dati iniziali (\bar{S}, \bar{I}) tali che $\bar{S} \geq 0$ e $\bar{I} = 0$ tendono al punto instabile (S_1, I_1) : infatti lungo il semiasse S positivo si ha $\dot{I} = 0$, mentre risulta $\dot{S} > 0$ se $S < S_1$ e $\dot{S} < 0$ se $S > S_1$. La situazione è rappresentata nella figura 5.42). La conservazione di N assicura che $R(t) \rightarrow R_2 = N - S_2 - I_2$ per $t \rightarrow +\infty$, da cui si conclude che, se ci si limita a dati iniziali in \mathcal{Q}_N , il punto di equilibrio P_2 è asintoticamente stabile e il suo bacino di attrazione è l'insieme \mathcal{Q}_N . Il parametro \mathfrak{R}_0 costituisce un valore di soglia. In assenza di malattia il numero di suscettibili è $S = (1 - \rho)N$, dal momento che R tiene conto dei ρN individui vaccinati. Se $\mathfrak{R}_0 \leq 1$, la malattia si evolve in modo che la malattia tenda a scomparire ripristinando i valori per cui nessun individuo è malato. Se invece \mathfrak{R}_0 è al di sopra del valore di soglia, compare un nuovo punto di equilibrio P_2 verso cui tendono tutte le traiettorie con dati iniziali in \mathcal{Q}_N . Tale punto corrisponde alla situazione in cui il numero di suscettibili è tanto minore del numero iniziale ($S_2 < (1 - \rho)N$) quanto più grande è il valore di \mathfrak{R}_0 . Corrispondentemente, aumenta il numero di infetti, che non solo tende al valore non

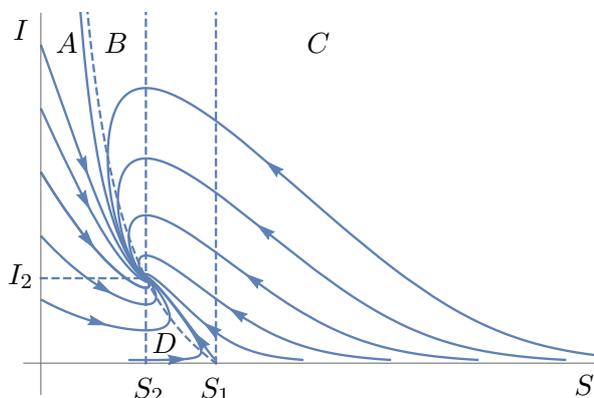


Figura 5.42: Traiettorie del sistema ridotto per il modello SIR endemico per $\mathfrak{R}_0 > 1$.

nullo $I_2 = \mathcal{I}(S_2) = (\mu/\beta_0)((S_1/S_2) - 1)N$, ma nel corso del tempo può raggiungere anche valori molto grandi prima di decadere (cfr. la figura 5.42). È quindi importante che il valore di \mathfrak{R}_0 sia il più piccolo possibile: considerato che il tasso di natalità e di mortalità sono indipendenti dalla malattia, occorre che ρ sia prossimo a 1, γ sia piccolo e β grande. Per β e γ valgono le stesse considerazioni dell'esercizio 75; un valore di ρ vicino a 1 comporta che la maggior parte della popolazione è stata vaccinata.]

Esercizio 82 Il modello *SEIR endemico* è una variante del modello SIR endemico (cfr. l'esercizio 77), in cui gli infetti non diventano contagiosi immediatamente e sono pertanto divisi in due categorie: gli infetti che sono già diventati contagiosi (infettivi) e gli *esposti*, che, pur avendo contratto la malattia, non sono ancora contagiosi. Il numero degli infettivi è indicato ancora con I , mentre E denota il numero degli esposti. Il sistema di equazioni che descrivono l'evoluzione della malattia è dato da

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta IS - \mu S + (1 - \rho)\mu N, \\ \dot{E} = \beta IS - \sigma E - \mu E, \\ \dot{I} = \sigma E - \gamma I - \mu I, \\ \dot{R} = \gamma I - \mu R + \rho\mu N, \end{cases}$$

dove $N = S + E + I + R$ rappresenta la popolazione totale, i parametri β , γ , μ e ρ sono definiti come nell'esercizio 77, mentre σ rappresenta il *tasso di incubazione*; $\rho = 0$ corrisponde al modello SEIR *senza vaccinazione*, $\rho \in (0, 1]$ al modello SEIR *con vaccinazione*. Si dimostri che la popolazione è costante e che l'insieme $\mathcal{Q} := \{(S, E, I, R) \in \mathbb{R}^4 : S, E, I, R \geq 0\}$ è invariante. [Suggerimento. Si ha $\dot{N} = -\beta IS - \mu S + (1 - \rho)\mu N + \beta IS - \sigma E - \mu E + \sigma E - \gamma I - \mu I + \gamma I - \mu R + \rho\mu N = 0$. Inoltre, se $S = 0$ si ha $\dot{S} \geq 0$, se $E = 0$ si ha $\dot{E} \geq 0$, se $I = 0$ si ha $\dot{I} \geq 0$, e se $R = 0$ si ha $\dot{R} \geq 0$: questo mostra che l'insieme \mathcal{Q} è invariante.]

Esercizio 83 Si determinino i punti di equilibrio del modello SEIR endemico senza vaccinazione (cfr. l'esercizio 81) e se ne calcoli la stabilità al variare dei parametri γ , $\beta_0 = \beta N$, μ , ρ e σ , nel caso in cui l'analisi lineare sia sufficiente. Si dimostri in particolare che, definendo $\mathfrak{R}_0 := \beta_0\sigma/(\gamma + \mu)(\sigma + \mu)$, si ha per $\mathfrak{R}_0 = 1$ una *biforcazione* nel senso dell'esercizio 78. [Suggerimento. I punti di equilibrio sono i punti $P = (S_0, E_0, I_0, R_0)$ in corrispondenza dei quali si annulla il campo vettoriale. Si ha $\dot{I} = 0$