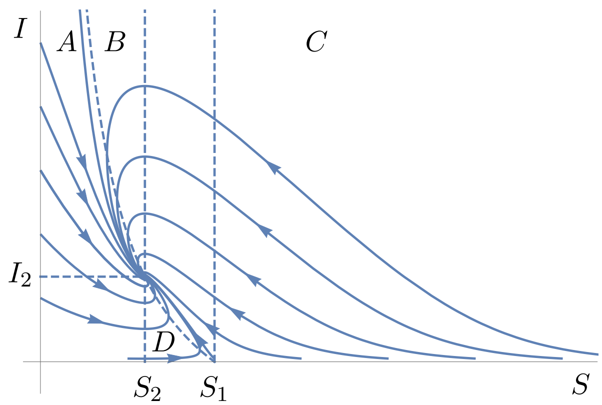

Figura 5.42: Traiettorie del sistema ridotto per il modello SIR endemico per $\mathfrak{R}_0 > 1$.

natalità e di mortalità sono indipendenti dalla malattia, occorre che ρ sia prossimo a 1, γ sia piccolo e β_0 grande. Per β_0 e γ valgono le stesse considerazioni dell'esercizio 75; un valore di ρ vicino a 1 comporta che la maggior parte della popolazione è stata vaccinata.]

Esercizio 82 Il *modello SEIR endemico* è una variante del modello SIR endemico (cfr. l'esercizio 77), in cui gli infetti non diventano contagiosi immediatamente e sono pertanto divisi in due categorie: gli infetti che sono già diventati contagiosi (infettivi) e gli *esposti*, che, pur avendo contratto la malattia, non sono ancora contagiosi. Il numero degli infettivi è indicato ancora con I, mentre E denota il numero degli esposti. Il sistema di equazioni che descrivono l'evoluzione della malattia è dato da

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta I S - \mu S + (1-\rho)\mu N, \\ \dot{E} = \beta I S - \sigma E - \mu E, \\ \dot{I} = \sigma E - \gamma I - \mu I, \\ \dot{R} = \gamma I - \mu R + \rho \mu N, \end{cases}$$

dove $N = S + E + I + R$ rappresenta la popolazione totale, i parametri β, γ, μ e ρ sono definiti come nell'esercizio 77, mentre σ rappresenta il *tasso di incubazione*; $\rho = 0$ corrisponde al modello SEIR *senza vaccinazione*, $\rho \in (0, 1]$ al modello SEIR *con vaccinazione*. Si dimostri che la popolazione è costante e che l'insieme $\mathcal{Q} := \{(S, E, I, R) \in \mathbb{R}^4 : S, E, I, R \geq 0\}$ è invariante. [*Suggerimento.* Si ha $\dot{N} = -\beta I S - \mu S + (1-\rho)\mu N + \beta I S - \sigma E - \mu E + \sigma E - \gamma I - \mu I + \gamma I - \mu R + \rho \mu N = 0$. Inoltre, se $S = 0$ si ha $\dot{S} \geq 0$, se $E = 0$ si ha $\dot{E} \geq 0$, se $I = 0$ si ha $\dot{I} \geq 0$, e se $R = 0$ si ha $\dot{R} \geq 0$: questo mostra che l'insieme $\mathcal{Q}$ è invariante.]

Esercizio 83 Si determinino i punti di equilibrio del modello SEIR endemico senza vaccinazione (cfr. l'esercizio 81) e se ne calcoli la stabilità al variare dei parametri γ, $\beta_0 = \beta N$, μ, ρ e σ, nel caso in cui l'analisi lineare sia sufficiente. Si dimostri in particolare che, definendo $\mathfrak{R}_0 := \beta_0 \sigma / (\gamma + \mu)(\sigma + \mu)$, si ha per $\mathfrak{R}_0 = 1$ una *biforcazione* nel senso dell'esercizio 78. [*Suggerimento.* I punti di equilibrio sono i punti $P = (S_0, E_0, I_0, R_0)$ in corrispondenza dei quali si annulla il campo vettoriale. Si ha $\dot{I} = 0$ se $I = 0$ oppure se $\beta \sigma S = (\gamma + \mu)(\sigma + \mu)$. Se $I = 0$, si trova $S = N$, $I = E = R = 0$; se invece

$S = S_2 := (\gamma + \mu)(\sigma + \mu)/\beta\sigma = N/\mathfrak{R}_0$, avendo definito

$$\mathfrak{R}_0 := \frac{\sigma\beta_0}{(\sigma + \mu)(\gamma + \mu)},$$

se $\mathfrak{R}_0 \geq 1$, si trova $I = I_2$, $E = E_2$ e $R = R_2$, dove

$$I_2 := \frac{\mu}{\beta_0}(\mathfrak{R}_0 - 1)\,N, \quad E_2 := \frac{\gamma + \mu}{\sigma} I_2 = \frac{\gamma + \mu}{\sigma}\frac{\mu}{\beta_0}(\mathfrak{R}_0 - 1)\,N, \quad R_2 := \frac{\gamma}{\mu} I_2 = \frac{\gamma}{\beta_0}(\mathfrak{R}_0 - 1)\,N,$$

così che si hanno i punti di equilibrio

$$P_1 = (N, 0, 0, 0), \quad P_2 = (S_2, E_2, I_2, R_2) = \Big(\frac{N}{\mathfrak{R}_0}, \frac{(\gamma + \mu)\mu}{\sigma\beta_0}(\mathfrak{R}_0 - 1)\,N, \frac{\mu}{\beta_0}(\mathfrak{R}_0 - 1)\,N, \frac{\gamma}{\beta_0}(\mathfrak{R}_0 - 1)\,N\Big),$$

dove P_2 è definito solo se $\mathfrak{R}_0 \geq 1$ e coincide con P_1 per $\mathfrak{R}_0 = 1$. Per studiare la stabilità dei punti di equilibrio, al solito, conviene prima studiare il *sistema ridotto*

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta IS - \mu S + \mu N, \\ \dot{E} = \beta IS - \sigma E - \mu E, \\ \dot{I} = \sigma E - \gamma I - \mu I, \end{cases}$$

dove N è una costante, e poi ricavare R utilizzando il fatto che $R = N - S - E - I$. I punti di equilibrio del sistema ridotto sono $Q_1 = (N, 0, 0)$ e $Q_2 = (S_2, E_2, I_2)$. La stabilità di ciascuno dei due punti di equilibrio si discute calcolando la matrice jacobiana J del sistema linearizzato corrispondente. Per Q_1 si trova

$$J = J(Q_1) := \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\beta_0 \\ 0 & -(\sigma + \mu) & \beta_0 \\ 0 & \sigma & -(\gamma + \mu) \end{pmatrix},$$

così che il polinomio caratteristico è

$$p_3(\lambda) = (\lambda + \mu)(\lambda^2 + (\gamma + 2\mu + \sigma)\lambda + (\gamma + \mu)(\sigma + \mu)(1 - \mathfrak{R}_0)).$$

Oltre a $\lambda_1 = -\mu$, gli autovalori sono $\lambda_2 = -(\gamma + 2\mu + \sigma - \Delta)/2$ e $\lambda_3 = -(\gamma + 2\mu + \sigma + \Delta)/2$, dove si è posto

$$\Delta := \sqrt{(\gamma + 2\mu + \sigma)^2 + 4(\gamma + \mu)(\sigma + \mu)(\mathfrak{R}_0 - 1)}.$$

L'autovalore λ_1 è sempre negativo, mentre λ_2 e λ_3 o sono negativi o hanno comunque parte reale negativa se $\mathfrak{R}_0 < 1$; se invece $\mathfrak{R}_0 > 1$, λ_2 è positivo; se infine $\mathfrak{R}_0 = 1$ si ha $\lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 = 0$, quindi l'analisi lineare non è sufficiente. In conclusione Q_1 è instabile se $\mathfrak{R}_0 > 1$ e asintoticamente stabile se $\mathfrak{R}_0 < 1$. Per Q_2, che esiste se $\mathfrak{R}_0 > 1$, si trova

$$J = J(Q_2) := \begin{pmatrix} -\mu\mathfrak{R}_0 & 0 & -\beta_0/\mathfrak{R}_0 \\ \mu(\mathfrak{R}_0 - 1) & -(\sigma + \mu) & \beta_0/\mathfrak{R}_0 \\ 0 & \sigma & -(\gamma + \mu) \end{pmatrix},$$

così che il polinomio caratteristico è $p_3(\lambda) = -P(\lambda)$, dove $P(\lambda) := \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$, con

$$a := \gamma + \mu\,(2 + \mathfrak{R}_0) + \sigma, \qquad b := \mu\mathfrak{R}_0\,(\gamma + 2\mu + \sigma)\,, \qquad c := \mu(\gamma + \mu)(\sigma + \mu)\,(\mathfrak{R}_0 - 1)\,.$$

Per studiare il segno degli autovalori, applichiamo la regola dei segni di Cartesio (cfr. l'esercizio 45 del capitolo 6). Poiché $a, b, c \geq$ il polinomio $P(\lambda)$ non ha zeri positivi e ha o 1 o 3 zeri negativi: ne concludiamo che gli zeri di $P(\lambda)$ sono o tutti e tre negativi, oppure uno è negativo e due sono complessi coniugati, i.e. della forma $\lambda = u \pm iv$, con $v \neq 0$. Nel secondo caso, ponendo $P(u+iv) = 0$, otteniamo due equazioni, una per la parte reale e una per la parte immaginaria del polinomio:

$$u^3 - 3uv^2 + au^2 - av^2 + bu + c = 0, \qquad (-v^2 + 3u^2 + 2au + b)v = 0.$$

Poiché stiamo supponendo $v \neq 0$, la seconda equazione dà $v^2 = 3u^2 + 2au + b$, che, inserita nella prima, implica $Q(u) := 8u^3 + 8u^2 + 2(a^2 + b)u + (ab - c) = 0$. Si verifica immediatamente che

$$ab = (\gamma + 2\mu + 2\mathfrak{R}_0 + \sigma)\,\mu\,\mathfrak{R}_0\,(\gamma + 2\mu + \sigma) \geq \mu(\gamma + \mu)(\sigma + \mu)\,(\mathfrak{R}_0 - 1) = c,$$

così che il polinomio $Q(u)$ ha 1 o 3 zeri negativi, e nessuno zero positivo. Ne segue che gli zeri di $P(\lambda)$ o sono negativi o, se sono complessi coniugati, hanno comunque parte reale negativa. Pertanto gli autovalori di $J(Q_2)$ hanno anch'essi tutti parte reale negativa, da cui si deduce, per il teorema 18.5, che Q_2 è asintoticamente stabile. Ragionando come nella soluzione del'esercizio 78, si conclude che, per il sistema completo, se $\mathfrak{R}_0 < 1$, l'unico punto di equilibrio è P_1 ed è stabile, mentre, se $\mathfrak{R}_0 > 1$, esistono due punti di equilibrio P_1 e P_2, di cui il primo è instabile e il secondo è stabile. Si noti che i punti di equilibrio stabili sono asintoticamente stabili se ci restringe ai moti che si svolgono sull'intersezione dell'iperpiano $S + E + I + R = N$ con l'insieme $\mathcal{Q}$ definito nell'esercizio 82, i.e. se si considera come spazio delle fasi una qualsiasi superficie in cui N sia stato fissato.]

Esercizio 84 Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio del modello SEIR endemico senza vaccinazione nel caso in cui l'analisi lineare non sia conclusiva (cfr. l'esercizio 83). [*Soluzione.* Dalla discussione dell'esercizio 78 segue si deve studiare la stabilità del punto di equilibrio P_1 per $\mathfrak{R}_0 = 1$. In tal caso si considera il *sistema ridotto* nel piano (S, E, I), le cui le equazioni sono date nella discussione dell'esercizio 83. Un primo cambiamento di coordinate, che consiste in una traslazione di N nella direzione S, porta il punto di equilibrio nell'origine; ponendo $S' := S - N$, in termini delle coordinate (S', E, I), le equazioni diventano

$$\begin{cases} \dot{S}' = -\beta I S' - \beta N I - \mu S', \\ \dot{E} = \beta I S' + \beta N I - \sigma E - \mu E, \\ \dot{I} = \sigma E - \gamma I - \mu I, \end{cases}$$

ovvero, in forma vettoriale,

$$\begin{pmatrix} \dot{S}' \\ \dot{E} \\ \dot{I} \end{pmatrix} = J(Q_1) \begin{pmatrix} S' \\ E \\ I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\beta I S' \\ \beta I S' \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove il primo termine tiene conto dei termini lineari e il secondo dei termini quadratici; la matrice del sistema linearizzato è ovviamente ancora $J(Q_1)$, come definita nella discussione dell'esercizio 83, con $\beta_0 \sigma = (\sigma + \mu)(\gamma + \mu)$ dato che $\mathfrak{R}_0 = 1$. Gli autovalori di $J(Q_1)$ sono (cfr. l'esercizio 83) $\lambda_1 = -\mu$, $\lambda_2 = -\gamma - 2\mu - \sigma$ e $\lambda_3 = 0$, e gli autovettori corrispondenti sono

$$v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = \left(\frac{(\gamma + \mu)(\sigma + \mu)}{\sigma(\gamma + \mu + \sigma)}, -\frac{\mu + \sigma}{\sigma}, 1 \right), \quad v_3 = \left(-\frac{(\gamma + \mu)(\sigma + \mu)}{\mu\sigma}, \frac{\mu + \gamma}{\sigma}, 1 \right).$$

Per semplificare le notazioni poniamo

$$a := \frac{(\gamma + \mu)(\sigma + \mu)}{\sigma\mu}, \qquad b := \frac{\mu + \sigma}{\sigma}, \qquad c := \frac{\mu + \gamma}{\sigma}, \qquad d := \frac{\mu}{\gamma + \mu + \sigma}.$$

La matrice del cambiamento di base che porta alla base degli autovettori è quindi

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ad & -b & 1 \\ -a & c & 1 \end{pmatrix},$$

mentre la matrice del cambiamento di coordinate è

$$Q = (P^T)^{-1} = \frac{1}{b+c} \begin{pmatrix} b+c & a(1+d) & a(b-cd) \\ 0 & -1 & c \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}.$$

Chiamando (x, y, z) le coordinate nella nuova base si ha

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} S' \\ E \\ I \end{pmatrix} = \frac{1}{b+c} \begin{pmatrix} (b+c)S' + a(1+d)E + a(b-cd)I \\ -E + cI \\ E + bI \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} S' \\ E \\ I \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ad & -a \\ 0 & -b & c \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + ady - az \\ -bx + cy \\ y + z \end{pmatrix}.$$

In particolare l'ottante $\{(S, E, I) \in \mathbb{R}^3 : S, E, I \geq 0\}$ viene trasformato dal doppio cambiamento di coordinate nell'insieme $\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq -4,\ z \geq 0\}$, dove si è tenuto che $S' \geq -4$ e

$$b - cd = \frac{\mu+\sigma}{\sigma} - \frac{\gamma+\mu}{\sigma} \frac{\mu}{\gamma+\mu+\sigma} = \frac{(\mu+\sigma)(\gamma+\mu+\sigma) - \mu(\gamma+\mu)}{\sigma(\gamma+\mu+\sigma)} > 0.$$

Nelle nuove variabili, dal momento che risulta

$$QJ(Q_1)Q^{-1} = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma - 2\mu - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

il sistema di equazioni assume la forma

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} &= Q \begin{pmatrix} \dot{S}' \\ \dot{E} \\ \dot{I} \end{pmatrix} = QJ(Q_1) \begin{pmatrix} S' \\ E \\ I \end{pmatrix} + Q \begin{pmatrix} -\beta I S' \\ \beta I S' \\ 0 \end{pmatrix} = QJ(Q_1)Q^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + Q \begin{pmatrix} -\beta I S' \\ \beta I S' \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\mu x \\ -(\gamma + 2\mu + \sigma)y \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{b+c} \begin{pmatrix} b+c & a(1+d) & a(b-cd) \\ 0 & -1 & c \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\beta\,(x + ady - az)\,(y+z) \\ \beta\,(x + ady - az)\,(y+z) \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e, scritto per componenti, diventa

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu x + A\,F(x,y,z), \\ \dot{y} = -\,(\gamma + 2\mu + \sigma)\,y + B\,F(x,y,z), \\ \dot{z} = C\,F(x,y,z), \end{cases}$$

dove abbiamo posto

$$A := \frac{a + ad}{b+c} - 1, \qquad B := -\frac{1}{b+c}, \qquad C := \frac{1}{b+c}, \qquad F(x,y,z) := \beta\,(x + ady - az)\,(y+z)\,.$$

Definiamo $W = W(x,y,z) := (x^2+y^2+z^2)$. Si ha

$$\begin{aligned}\dot W &= 2x\dot x + 2y\dot y + 2z\dot z = -\mu x^2 - (\gamma+2\mu+\sigma)\,y^2 + (Ax+By+Cz)\,F(x,y,y)\\ &= -\mu x^2 - (\gamma+2\mu+\sigma)\,y^2 - a\beta C z^3 + \beta G(x,y,z),\end{aligned}$$

dove

$$G(x,y,z) = (Ax+By+Cz)\,((y+z)\,(x+ady) - ayz) - az^2\,(Ax+-By)\,.$$

Sia $r^2 := x^2+y^2$; si ha $|x\pm y| \le |x|+|y| \le \sqrt{2}r$ e $|y|\le r$, come è immediato verificare. Si trova (si ricordi che si ha $z\ge 0$ in $\mathcal{R}$)

$$|G(x,y,z)| \le \alpha_1^2\left(\big(\sqrt{2}r+z\big)\big(\sqrt{2}r\,(r+z)+rz\big)+\sqrt{2}rz^2\right) \le 2\alpha_1^2\left(r(r+z)^2+rz(r+z)+rz^2\right).$$

dove $\alpha_1 := \max\{1,|A|,|B|,C,a,ad\}$. Sia $(x,y,z)\in\{(x,y,z)\in\mathcal{R} : x^2+y^2+z^2\le\delta^2\}$, con $\delta<N$ da fissare. Sia $2\alpha_0 := \min\{\mu, a\beta_0 C\}$. Se $Nr^2\le z^3$ si ha, per δ sufficientemente piccolo,

$$\beta_0\,|G(x,y,z)| \le \frac{2\alpha_1^2\beta_0}{\sqrt{N}}\left(4z^{3/2}z^2+2z^{3/2}z^2+z^{3/2}z^2\right) \le \frac{14\alpha_1^2}{\sqrt{N}}z^{7/2} \le 14\alpha_1^2\beta_0\Big(\frac{\delta}{N}\Big)^{1/2}z^3 \le \alpha_0 z^3,$$

mentre se $Nr^2 > z^3$ si ha, sempre per δ sufficientemente piccolo,

$$\beta_0\,|G(x,y,z)| \le 2\alpha_1^2\beta_0\left(4rr^{4/3}N^{2/3}+2rr^{4/3}N^{2/3}+rr^{4/3}N^{2/3}\right) \le 14\alpha_1^2\beta_0\Big(\frac{\delta}{N}\Big)^{1/3}Nr^2 \le \alpha_0 Nr^2.$$

Poiché per ogni $x,y\in[0,N]$ si ha

$$\begin{aligned}(x^2+y^2)^3 &= x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6 \le x^4\left(x^2+3y^2\right)+3x^2y^4+y^6 \le 4N^2x^4+3x^2y^4+y^6\\ &\le 4N^2x^4+3Nx^2y^3+y^6 \le 4N^2x^4+8Nx^2y^3+4y^6 = 4\left(Nx^2+y^3\right)^2,\end{aligned}$$

possiamo stimare

$$\dot W \le -2\alpha_0\Big(r^2+\frac{z^3}{N}\Big)+\frac{\alpha_0}{N}\max\{z^3,Nr^2\} \le -\frac{\alpha_0}{N}\left(Nr^2+z^3\right) \le -\frac{\alpha_0}{4N}\left(r^2+z^2\right)^{3/2} \le -\frac{\alpha_0}{4N}W^{3/2}.$$

Sia W_0 la soluzione dell'equazione $\dot W = -(\alpha_0/4N)W^{3/2}$; l'equazione si integra per separazione di variabili e, per ogni dato iniziale $(\bar x,\bar y,\bar z)$ in un intorno sufficientemente piccolo dell'origine, si trova

$$W_0(t) = \frac{4W_0(0)}{\left(2+\alpha_1 t\sqrt{W_0(0)}\right)^2}, \qquad \alpha_1 := \frac{\alpha_0}{4N},$$

dove $W_0(0) = \bar x^2+\bar y^2+\bar z^2$. Fissato $W(0)=W_0(0)$, si ha $W(t)\le W_0(t)$ $\forall t\in\mathbb{R}$ per l'esercizio 48 del capitolo 4. Questo dimostra che, per dati iniziali in $\mathcal{R}$ sufficientemente vicini all'origine, le traiettorie $(x(t),y(t),z(t))$ tendono all'origine, ovvero che tutte le traiettorie $(S(t),E(t),I(t))$ che abbiano dati iniziali in $\mathcal{Q}$ sufficientemente vicini a $(N,0,0)$ tendono a $(N,0,0)$, che è pertanto un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema ridotto. La conservazione di N implica che $R(t)$ tende a 0, da cui si conclude che, per il modello SEIR endemico senza vaccinazione, se $\mathfrak{R}_0 = 1$ il punto di equilibrio $P_1 = (N,0,0,0)$ è stabile – e asintoticamente stabile se si considera come spazio delle fasi l'iperpiano $S+E+E+R=N$, con N fissato. (Per una diversa dimostrazione si veda l'esercizio 88).]

Esercizio 85 Si dimostri che, nel modello SEIR endemico senza vaccinazione, per N fissato e $\mathfrak{R}_0<1$, si ha un punto di equilibrio asintoticamente stabile globalmente attrattivo. [*Suggerimento.* Per $\mathfrak{R}_0<1$, si ha il solo punto di equilibrio $P_1=(N,0,0,0)$, che è asintoticamente stabile se si considerano dati iniziali con N fissato (cfr. l'esercizio 83). Per dimostrare che il suo bacino di attrazione è l'intero insieme $\mathcal{Q}_N := \{(S,E,I,R)\in\mathbb{R}_+^4 : S+E+I+R=N\}$, si ragiona come segue (cfr. il teorema 19.18

per una trattazione simile). Si consideri il sistema ridotto (cfr. l'esercizio 84) nel piano (S, E, I) e si definisca in $\mathcal{D}_0 = \{(S, E, I) \in \mathbb{R}^3_+ : S > 0\}$ la funzione di Ljapunov

$$W(S, E, I) := S - N - N \log \frac{S}{N} + E + \frac{\mu + \sigma}{\sigma} I.$$

La funzione $f(x) := x - 1 - \log x$, per $x > 0$, è convessa e ha in $x = 1$ un minimo assoluto nullo: infatti $f'(x) = 1 - x^{-1} = 0$ se e solo se $x = 1$, $f(x) = x^{-2} > 0$ e $f(1) = 0$. Quindi si ha $W(N, 0, 0) = 0$ e $W(S, E, I) > 0 \ \forall (S, E, I) \neq (N, 0, 0)$ in $\mathcal{D}_0$. Inoltre risulta

$$\begin{aligned}
\dot{W} &= \Big(1 - \frac{N}{S}\Big)\dot{S} + \dot{E} + \frac{\mu + \sigma}{\sigma}\dot{I} \\
&= \Big(1 - \frac{N}{S}\Big)(-\beta IS - \mu S + \mu N) + (\beta IS - \sigma E - \mu E) + \frac{\mu + \sigma}{\sigma}(\sigma E - \gamma I - \mu I) \\
&= -\beta IS - \mu S + \mu N + \beta NI + \mu N + \frac{\mu N^2}{S} + \beta IS - \sigma E - \mu E + \mu E + \sigma E - \frac{(\mu + \sigma)(\gamma + \mu)}{\sigma} I \\
&= -\mu N \left(\frac{N}{S} + \frac{S}{N} - 2\right) - \left(\frac{(\mu + \sigma)(\gamma + \mu)}{\sigma} - \beta N\right) I \\
&= -\mu N \left(\frac{N}{S} + \frac{S}{N} - 2\right) - \frac{(\mu + \sigma)(\gamma + \mu)}{\sigma}(1 - \mathfrak{R}_0) I.
\end{aligned}$$

La funzione $g(x) := x + x^{-1} - 2$, per $x > 0$, è convessa e ha in $x = 1$ un punto di minimo nullo: infatti $g'(x) = 1 - x^{-2} = 0$ se e solo se $x = 1$, $g''(x) = 2/x^3 > 0$ e $g(1) = 0$. Ne concludiamo che in $\mathcal{D}_0$ la funzione W soddisfa le seguenti proprietà:

- $W(N, 0, 0) = 0$ e $W(S, E, I) > 0 \ \forall (S, E, I) \neq (N, 0, 0)$;
- $\dot{W}(S, E, I) \leq 0$ e $\dot{W}(S, E, I) = 0$ se e solo se $S = N$ e $I = 0$.

Di conseguenza, se indichiamo con $\varphi(t, \bar{x}) = (S(t), E(t), I(t))$ la soluzione con dato iniziale $\bar{x} = (\bar{S}, \bar{E}, \bar{I})$, per ogni $\bar{x} \in \mathcal{D}_0$, si ha $W(\varphi(t, \bar{x})) \leq \bar{W} := W(\bar{x})$, e quindi

$$0 \leq E(t) \leq \bar{W}, \qquad 0 \leq I(t) \leq \frac{\sigma}{\mu + \sigma}\bar{W}, \qquad 0 \leq S(t) \leq S_*(\bar{W}),$$

dove $S_*(W)$ è la soluzione unica maggiore di N dell'equazione $S - N - \log(S/N) = W$, così che la traiettoria $\varphi(t, \bar{x})$ rimane sempre all'interno di un compatto e $L := L_\omega(\bar{x}) \neq \emptyset$ (cfr. il lemma 19.9); inoltre si ha $L \subset \mathcal{D}_0$, poiché L è invariante (cfr. il teorema 17.18) e $\dot{S} > 0$ se $S = 0$. Supponiamo per assurdo che L non consista nel punto di equilibrio $x_0 := (N, 0, 0)$. Se L contiene un punto $x \neq x_0$, si ha: $\varphi(t, x) \neq x_0$, per il teorema di unicità; $\varphi(t, x) \in L$, poiché L è invariante; $\dot{W}(\varphi(t, x)) = 0 \ \forall t \geq 0$, per il teorema 17.24. Se da un lato $\dot{W} = 0$ solo se $S = N$ e $I = 0$, dall'altro l'insieme in cui $S = N$ e $I = 0$ non contiene altre traiettorie oltre a x_0: infatti se $S = N$ e $I = 0$, si ha $\dot{I} = 0$ solo se $E = 0$. Quindi non è possibile che esista una traiettoria $\varphi(t, x)$, con $x \neq x_0$, per cui si abbia $\dot{W}(\varphi(t, x)) = 0 \ \forall t \geq 0$. La contraddizione trovata mostra che si ha necessariamente $L = \{x_0\}$. Si procede poi ragionando come nella dimostrazione dei teoremi 19.10 e 19.18: poiché da ogni successione di tempi $\{t_k\}$ si può estrarre una sottosuccessione $\{t_{k_n}\}$ tale $\varphi(t_{k_n}, \bar{x}) \to x_0$ e il limite non dipende dalla particolare sottosuccessione scelta, allora si ha $\varphi(t_k, \bar{x}) \to x_0$, e poiché la successione $\{t_k\}$ è arbitraria, allora, per il teorema ponte (cfr. il teorema 19.4), si ha $\varphi(t, \bar{x}) \to x_0$. Data l'arbitrarietà del dato iniziale $\bar{x}$, ogni traiettoria con $\bar{S} > 0$ tende a x_0. D'altra parte se $\bar{S} = 0$ si ha $\dot{S}(0) > 0$ e quindi $S(t) > 0 \ \forall t > 0$ e la traiettoria entra nell'insieme $\mathcal{D}_0$ in cui si applica l'argomento precedente: ne segue che anche le traiettorie con $\bar{S} = 0$ tendono a x_0. Per concludere la dimostrazione si osservi infine che, per la conservazione di N, se $(S(T), E(t), I(t))$ converge a $(N, 0, 0)$, necessariamente $R(t)$ converge a 0.]

Esercizio 86 Si dimostri che, nel modello SEIR endemico senza vaccinazione, per $\mathfrak{R}_0 > 1$ e N fissato, si ha un punto di equilibrio asintoticamente stabile il cui bacino di attrazione coincide, a meno di un insieme di misura nulla, con $\mathcal{Q}_N = \{(S,E,I,R) \in \mathbb{R}^4_+ : S+E+I+R = N\}$. [*Soluzione.* Si consideri il sistema ridotto (cfr. l'esercizio 84) nel piano (S,E,I) e si definisca in $\mathcal{D} := \{\mathbb{R}^3_+ : S,E,I > 0\}$ la funzione di Ljapunov

$$W(S,E,I) := S - S_2 - S_2 \log\frac{S}{S_2} + E - E_2 - E_2 \log\frac{E}{E_2} + \frac{\mu+\sigma}{\sigma}\left(I - I_2 - I_2\log\frac{I}{I_2}\right),$$

dove S_2, E_2 e I_2 sono definiti come nella discussione dell'esercizio 83. Si verifica facilmente (cfr. la discussione dell'esercizio 85) che si ha $W(S_2,E_2,I_2)=0$ e $W(S,E,I)>0$ $\forall (S,E,I)\neq(S_2,E_2,I_2)$ in $\mathcal{D}$. Iinoltre risulta

$$\begin{aligned}
\dot W &= \left(1-\frac{S_2}{S}\right)\dot S + \left(1-\frac{E_2}{E}\right)\dot E + \frac{\mu+\sigma}{\sigma}\left(1-\frac{I_2}{I}\right)\dot I \\
&= \left(1-\frac{S_2}{S}\right)(-\beta IS - \mu S + \mu N) + \left(1-\frac{E_2}{E}\right)(\beta IS - \sigma E - \mu E) + \frac{\mu+\sigma}{\sigma}\left(1-\frac{I_2}{I}\right)(\sigma E - \gamma I - \mu I) \\
&= -\mu S + \mu N + \mu S_2 - \mu N\frac{S_2}{S} - \beta E_2\frac{IS}{E} + (\sigma+\mu)E_2 - (\mu+\sigma)I_2\frac{E}{I} + \frac{(\mu+\sigma)(\gamma+\mu)}{\sigma} I_2 \\
&= -\mu\,(S-N) + \frac{\mu S_2}{S}(S-N) - \left(\beta\frac{\gamma+\mu}{\sigma}\frac{IS}{E} + (\mu+\sigma)\frac{E}{I} - 2\frac{(\mu+\sigma)(\gamma+\mu)}{\sigma}\right)\frac{\mu}{\beta}(\mathfrak{R}_0-1), \\
&= -\frac{\mu}{S}(S-S_2)(S-N) - \left(\beta\frac{\gamma+\mu}{\sigma}\frac{IS}{E} + \frac{\sigma}{\gamma+\sigma}\beta S_2\frac{E}{I} - 2\beta S_2\right)\frac{\mu}{\beta}(\mathfrak{R}_0-1) \\
&= -\frac{\mu}{S}(S-S_2)^2 - \mu(\mathfrak{R}_0-1)\frac{S_2}{S}(S_2-S) - \mu(\mathfrak{R}_0-1)\left(\frac{\gamma+\mu}{\sigma}\frac{IS}{E} + \frac{\sigma}{\gamma+\mu}S_2\frac{E}{I} - 2S_2\right) \\
&= -\frac{\mu}{S}(S-S_2)^2 - \mu(\mathfrak{R}_0-1)S_2\left[\left(\frac{S_2}{S}-1\right) + \frac{\gamma+\mu}{\sigma}\frac{I}{E}\frac{S}{S_2} + \frac{\sigma}{\gamma+\mu}\frac{E}{I} - 2\right],
\end{aligned}$$

dove si è tenuto conto (cfr. le notazioni dell'esercizio 83) che

$$\frac{(\sigma+\mu)(\gamma+\mu)}{\sigma} = \frac{\beta_0}{\mathfrak{R}_0} = \frac{\beta N}{\mathfrak{R}_0} = \beta S_2, \qquad (\sigma+\mu)E_2 = \frac{(\sigma+\mu)(\gamma+\mu)}{\sigma} I_2, \qquad I_2 = \frac{\mu}{\beta}(\mathfrak{R}_0-1),$$

e si è usato che i termini proporzionali a SI, E e I si cancellano. Possiamo riscrivere

$$\dot W = -\frac{\mu}{S}(S-S_2)^2 - \mu(\mathfrak{R}_0-1)S_2\,F\left(\frac{S}{S_2}, \frac{\gamma+\mu}{\sigma}\frac{I}{E}\right), \qquad F(x,y) := \frac{1}{x} + xy + \frac{1}{y} - 3.$$

Si vede facilmente che

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y - \frac{1}{x^2}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = x - \frac{1}{y^2},$$

così che le due derivate si annullano se e solo se $x = y = 1$, e, inoltre, $F(1,1) = 0$ e

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{x^3} & 1 \\ 1 & \dfrac{2}{y^3} \end{pmatrix}.$$

Questo mostra che la funzione $F(x,y)$ è convessa, per $x,y > 0$, e ha in $x = y = 1$ un punto di minimo nullo: ne segue che $\dot W(S,E,I) = 0$ se e solo se $(S,E,I) \in \mathcal{Q}$, dove $\mathcal{Q} := (S,E,I) \in \mathcal{D} : S =$

$S_2, (\gamma+\mu)I = \sigma E\}$. D'altra parte l'unica traiettoria interamente contenuta in $\mathcal{Q}$ è il punto di equilibrio (S_2, E_2, I_2): infatti, per $S = S_2$, si ha $\dot{S} = 0$ se e solo se $I = I_2$ e la condizione $(\gamma + \mu)I = \sigma E$ impone allora $E = E_2$. Inoltre, se definiamo $f(x) := x - 1 - \log x$, come nella discussione dell'esercizio 85, e indichiamo con $X(M)$ l'unica soluzione maggiore di 1 dell'equazione $f(x) = M$, per ogni dato iniziale $(\bar{S}, \bar{E}, \bar{I})$, con $\bar{S}, \bar{E}, \bar{I} > 0$, si ha $S(t) \leq \bar{S}_2\, X(\bar{W}/S_2)$, $E(t) \leq E_2\, X(\bar{W}/E_2)$ e $I(t) \leq I_2\, X(\bar{W}\sigma/(\mu+\sigma)I_2)$, con $\bar{W} := W(\bar{S}, \bar{E}, \bar{I})$. Quindi la soluzione $\varphi(t, \bar{x})$ con dato iniziale $\bar{x} = (\bar{S}, \bar{E}, \bar{I})$ rimane sempre all'interno di un compatto: ragionando di nuovo come nella discussione dell'esercizio 85, si trova che, se $L_\omega(\bar{x}) \subset \mathcal{D}$, allora $L_\omega(x) = \{x_2\}$, dove $x_2 = (S_2, E_2, I_2)$, e ogni traiettoria $\varphi(t, \bar{x})$, con $\bar{x} \in \mathcal{D}$ e $L_\omega(x) \in \mathcal{D}$, tende a x_2; per la conservazione di N, se $(S(t), E(t), I(t)) \to (S_2, E_2, I_2)$, si ha anche $R(t) \to R_2$. Se invece $L_\omega(x)$ non è contenuto in $\mathcal{D}$, allora deve appartenere all'unione dei tre insiemi $\mathcal{D}_1 := \{(S, E, I) \in \mathbb{R}^3_+ : S = 0\}$, $\mathcal{D}_2 := \{(S, E, I) \in \mathbb{R}^3_+ : E = 0\}$ e $\mathcal{D}_3 := \{(S, E, I) \in \mathbb{R}^3_+ : I = 0\}$. Tuttavia, se $S = 0$ si ha $\dot{S} > 0$; se $I = 0$, si ha $\dot{I} = 0$ se e solo se $E = 0$; se $E = 0$, si ha $\dot{E} = 0$ se e solo se $IS = 0$, i.e. se e solo se $S = 0$ oppure $I = 0$. Usando l'invarianza degli insiemi ω-limite, se ne deduce che se $L_\omega(x) \notin \mathcal{D}$ allora $L_\omega(x) \in \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3 = \{(S, E, I) \in \mathbb{R}^3_+ : E = I = 0\}$. D'altra parte, se $E = I = 0$, l'equazione per S si riduce a $\dot{S} = \mu(N - S)$, quindi, se $\bar{E} = \bar{I} = 0$ si ha $S(t) \to N$. Questo comporta che, se $L_\omega(x) \notin \mathcal{D}$, si ha $L_\omega(x) = \{x_0\}$, con $x_0 = (N, 0, 0)$. Poiché x_0 è instabile e ha un solo autovalore positivo, la sua varietà stabile (cfr. la nota bibliografica) consiste in una superficie di dimensione 2 e ha quindi misura di Lebesgue nulla in $\mathbb{R}^3_+$. Per concludere, osservando che il moto della variabili (S, E, I) determina univocamente quello della variabile R, tutte le traiettorie in $\mathbb{R}^4_+$ con dati iniziali $(\bar{S}, \bar{E}, \bar{I}, \bar{R})$ tali che $\bar{S} + \bar{E} + \bar{I} + \bar{R} = N$, con N fissato, tendono al punto di equilibrio asintoticamente stabile P_1, tranne quelle che partono da un insieme di misura nulla – la varietà stabile (di dimensione 3) del punto di equilibrio instabile P_1. Si noti che il moto si svolge nell'iperpiano tridimensionale $S + E + I + R = N$ in $\mathbb{R}^4_+$ e che la varietà stabile di P_1 costituisce un sottoinsieme di dimensione 2 di tale iperpiano.]

Esercizio 87 Si dimostri che, nel modello SEIR endemico senza vaccinazione, per N fissato e $\mathfrak{R}_0 = 1$, si ha un punto di equilibrio asintoticamente stabile globalmente attrattivo. [*Suggerimento.* Per $\mathfrak{R}_0 = 1$, il punto di equilibrio $Q_1 = (N, 0, 0)$ è asintoticamente stabile per il sistema ridotto (cfr. l'esercizio 84). Si procede allora come nella discussione dell'esercizio 85, utilizzando la stessa funzione di Ljapunov W. La sola differenza è che ora si ha $\dot{W} = 0$ se e solo se $S = N$. D'altra parte l'unica traiettoria interamente contenuta nell'insieme $\{(S, E, I) \in \mathcal{D} : S = N\}$ è il punto di equilibrio $(N, 0, 0)$: infatti se $S = N$, si ha $\dot{S} = 0$ solo se $I = 0$, ma, per $I = 0$, la condizione $\dot{I} = 0$ richiede anche $E = 0$.]

Esercizio 88 Si dimostri, utilizzando un'opportuna funzione di Ljapunov, che, nel modello SIR endemico (cfr. l'esercizio 77), per ogni valore del parametro $\mathfrak{R}_0$ introdotto nell'esercizio 78, il punto di equilibrio asintoticamente stabile attrae tutte le traiettorie con dati iniziali $(\bar{S}, \bar{I}, \bar{R}) \in \mathbb{R}^3_+$ tali che $\bar{S} + \bar{I} + \bar{R} = N$, con N fissato, a meno di un insieme di misura nulla nel caso $\mathfrak{R}_0 > 1$. [*Suggerimento.* Si ragiona come negli esercizi 85 e 86, scegliendo come funzioni di Ljapunov per il sistema ridotto la funzione

$$W(S, I) := S - S_1 + S_1 \log \frac{S}{S_1} +, \qquad S_1 = (1 - \rho)N, \tag{25.5}$$

se $\mathfrak{R}_0 \leq 1$, e la funzione

$$W(S, I) := S - S_2 - S_2 \log \frac{S}{S_2} + I - I_2 - I_2 \log \frac{I}{I_2}, \qquad S_2 = \frac{\gamma + \mu}{\beta}, \quad I_2 = \frac{\mu}{\beta}(\mathfrak{R}_0 - 1), \tag{25.6}$$

se $\mathfrak{R}_0 > 1$. L'insieme di misura da escludere se $\mathfrak{R}_0 > 1$ è, per il sistema ridotto, la semiretta S positiva, che costituisce la varietà stabile del punto di equilibrio instabile $(N, 0)$.]