

14 | Teoria delle piccole oscillazioni

§64 Linearizzazione

Consideriamo un sistema meccanico conservativo descritto dalla lagrangiana (di classe C^2)

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, A(q) \dot{q} \rangle - V(q), \quad (64.1)$$

dove $T(q, \dot{q}) = \langle \dot{q}, A(q) \dot{q} \rangle / 2$ è l'energia cinetica e $V(q)$ è l'energia potenziale. La matrice $A(q)$ dipende solo dalle coordinate q : $T(q, \dot{q})$ è una forma quadratica definita positiva nelle variabili \dot{q} ; cfr. il lemma 58.2. Le corrispondenti *equazioni di Eulero-Lagrange* sono date da

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}, \quad (64.2)$$

e possono essere interpretate come un sistema dinamico; cfr. il §58.

Ricordiamo che, per il teorema 58.4, il punto $(q, \dot{q}) = (q_0, v_0)$ è un punto d'equilibrio per il sistema (64.2) se e solo se $v_0 = 0$ e q_0 è un punto critico dell'energia potenziale $V(q)$; inoltre, se q_0 è un punto di minimo isolato dell'energia potenziale $V(q)$, allora $(q_0, 0)$ è un punto d'equilibrio stabile.

Osservazione 64.1 Nel seguito del capitolo, assumeremo sempre $q_0 = 0$. Questo non è restrittivo; se infatti $q_0 \neq 0$, possiamo effettuare un cambiamento di coordinate $q \mapsto q' = q - q_0$ tale che $q_0 \mapsto 0$.

Teorema 64.2 *Il sistema linearizzato del sistema (64.2) in un intorno del punto d'equilibrio $(q, \dot{q}) = (0, 0)$ è dato da*

$$A\ddot{q} = -Bq, \quad (64.3)$$

dove $A = A(0)$ e B è la matrice di elementi

$$B_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q=0}. \quad (64.4)$$

Le (64.3) sono quindi le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti alla lagrangiana

$$\mathcal{L}_2(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, A\dot{q} \rangle - \frac{1}{2} \langle q, Bq \rangle, \quad (64.5)$$

data dalla parte quadratica di $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ in un intorno del punto d'equilibrio.

Dimostrazione. Scriviamo le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema con lagrangiana (64.1). Le equazioni linearizzate si otterranno prendendo la parte lineare di $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}$ e di $\partial\mathcal{L}/\partial q$: tale parte lineare si otterrà quindi dalla parte quadratica di \mathcal{L} . ■

Esempio 64.3 Consideriamo il sistema unidimensionale descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 - V(q), \quad (64.6)$$

e sia $q_0 = 0$ un minimo isolato per $V(q)$. Allora la parte quadratica di \mathcal{L} in un intorno del punto d'equilibrio stabile $(q, \dot{q}) = (0, 0)$ è data da

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}a_0\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2, \quad a_0 = a(0), \quad k = \frac{d^2V}{dq^2}(0). \quad (64.7)$$

Il moto è determinato dall'equazione $\ddot{q} = -\omega^2 q$, dove $\omega^2 = k/a_0$, ed è quindi dato da

$$q(t) = c_1 \cos \omega t + s_1 \sin \omega t, \quad (64.8)$$

dove c_1 e s_1 sono costanti che dipendono dai dati iniziali. Il moto del sistema linearizzato è dunque un moto periodico, che descrive un'oscillazione intorno alla posizione d'equilibrio $(0, 0)$: esso prende il nome di *piccola oscillazione* di frequenza ω e ω si chiama *frequenza propria*.

§65 Piccole oscillazioni

Abbiamo visto nel paragrafo precedente (cfr. l'esempio 64.3) che, nell'approssimazione lineare, nell'intorno di un punto d'equilibrio stabile, il moto di un sistema meccanico conservativo a un grado di libertà è di tipo oscillatorio. Vogliamo mostrare nel presente paragrafo, nel caso di sistemi a più gradi di libertà, il moto si può ancora vedere come combinazione lineare di moti oscillatori. Se le matrici A e B in (64.5) sono diagonali questo è ovvio, nel caso generale richiede un cambiamento di variabili.

Ricordiamo che se A è una matrice simmetrica, allora (cfr. gli esercizi 31÷35 del capitolo 1)

- A è diagonalizzabile;
- i suoi autovalori sono reali;
- i suoi autovettori sono ortogonali;
- la matrice U che diagonalizza A è ortogonale ($U^T = U^{-1}$).

Lemma 65.1 *Siano A e B due matrici $n \times n$ simmetriche e sia A definita positiva. Allora l'equazione*

$$\det(B - \lambda A) = 0 \quad (65.1)$$

ammette n soluzioni reali. Se B è definita positiva, tali soluzioni sono positive.

Dimostrazione. Poiché la matrice A è definita positiva, il suo determinante è positivo e quindi la matrice è invertibile. Inoltre esiste una matrice α , simmetrica e invertibile anch'essa, tale che $A = \alpha^2$ (cfr. l'esercizio 1 del capitolo 12). Definiamo $\beta := \alpha^{-1}B\alpha^{-1}$. È immediato verificare che β è una

matrice simmetrica; inoltre β è definita positiva se B è definita positiva (cfr. l'esercizio 3). Quindi i suoi autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono reali e sono tutti positivi se B è definita positiva. D'altra parte, se λ è un autovalore di β si ha

$$\det(\alpha^{-1}) \det(B - \lambda A) \det(\alpha^{-1}) = \det(\beta - \lambda \mathbf{1}) = 0 \quad (65.2)$$

e poiché α è non singolare allora λ risolve anche l'equazione (65.1). ■

Definizione 65.2 (EQUAZIONE CARATTERISTICA) *La (65.1) prende il nome di equazione caratteristica per la determinazione degli autovalori della matrice B rispetto alla matrice A .*

Lemma 65.3 *Siano A e B due matrici $n \times n$ simmetriche definite positive e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ le soluzioni dell'equazione (65.1). Allora esistono n vettori linearmente indipendenti ξ_1, \dots, ξ_n tali che $B\xi_i = \lambda_i A\xi_i$ per $i = 1, \dots, n$.*

Dimostrazione. Siano v_1, \dots, v_n gli autovettori della matrice $\beta = \alpha^{-1}B\alpha^{-1}$. Poiché β è una matrice simmetrica (cfr. la dimostrazione del lemma 65.1), i vettori v_1, \dots, v_n sono ortogonali e quindi linearmente indipendenti. Definiamo $\xi_i = \alpha^{-1}v_i$, $i = 1, \dots, n$. Poiché $\det \alpha \neq 0$, anche i vettori ξ_1, \dots, ξ_n sono linearmente indipendenti. Si ha allora

$$\beta v_i = \lambda v_i \implies \beta \alpha \xi_i = \lambda_i \alpha \xi_i \implies \alpha \beta \alpha \xi_i = \lambda_i \alpha^2 \xi_i$$

e quindi $B\xi_i = \lambda_i A\xi_i$ per $i = 1, \dots, n$. ■

Teorema 65.4 *Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ le soluzioni dell'equazione caratteristica (65.1) e siano ξ_1, \dots, ξ_n i vettori che soddisfano le equazioni*

$$(B - \lambda_i A)\xi_i = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (65.3)$$

Si consideri la trasformazione $q = CQ$, definita da

$$C = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} & \dots & \xi_{n1} \\ \xi_{12} & \xi_{22} & \dots & \xi_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{1n} & \xi_{2n} & \dots & \xi_{nn} \end{pmatrix}, \quad (65.4)$$

dove ξ_{ij} è la componente j -esima del vettore ξ_i . Allora, nelle coordinate Q , le equazioni di Eulero-Lagrange (64.3) diventano

$$\ddot{Q}_i = -\omega_i^2 Q_i, \quad i = 1, \dots, n \quad i = 1, \dots, n. \quad (65.5)$$

dove $\omega_i^2 = \lambda_i$ per $i = 1, \dots, n$.

Dimostrazione. Introducendo la matrice C data dalla (65.4), le equazioni (65.3) si possono scrivere come un'unica equazione matriciale (cfr. l'esercizio 4)

$$BC - ACD = 0, \quad (65.6)$$

dove \mathcal{D} è la matrice diagonale di elementi $\mathcal{D}_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$. Quindi si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \langle \dot{q}, A\dot{q} \rangle - \frac{1}{2} \langle q, Bq \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle C\dot{Q}, AC\dot{Q} \rangle - \frac{1}{2} \langle CQ, BCQ \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \dot{Q}, C^T AC\dot{Q} \rangle - \frac{1}{2} \langle Q, C^T BCQ \rangle,\end{aligned}\tag{65.7}$$

da cui, tenendo conto che le matrici $C^T AC$ e $C^T BC$ sono simmetriche, si ottengono le equazioni di Eulero-Lagrange

$$C^T AC\ddot{Q} = -C^T BCQ.\tag{65.8}$$

Quindi, se C è definita come in (65.4), la (65.6), introdotta nella (65.8), dà

$$C^T AC (\ddot{Q} + \mathcal{D}Q) = 0.\tag{65.9}$$

Poiché entrambe le matrici A e C sono non singolari (cfr. l'esercizio 6) ne segue Q deve soddisfare le equazioni del moto $\ddot{Q} = -\mathcal{D}Q$, i.e. $\ddot{Q}_i = -\lambda_i Q_i$, per $i = 1, \dots, n$. ■

Osservazione 65.5 Nelle coordinate Q , le equazioni di Eulero-Lagrange (65.5) possono essere risolte immediatamente. Per ogni $i = 1, \dots, n$, poiché $\omega_i^2 > 0$, si ha un moto oscillatorio

$$Q_i(t) = c_i \cos \omega_i t + s_i \sin \omega_i t,\tag{65.10}$$

dove c_i e s_i sono coefficienti costanti che dipendono dalle condizioni iniziali. Il teorema 65.4 implica quindi che, nell'approssimazione lineare, ogni $q_k(t)$ è una combinazione lineare di oscillazioni (65.10) con coefficienti \mathcal{C}_{ki} .

Osservazione 65.6 In principio si può studiare il sistema linearizzato in corrispondenza di ogni posizione d'equilibrio, non necessariamente stabile. Operando il cambiamento di variabili $q = CQ$, con C data dalla (65.4), il moto risulta ancora essere una combinazione lineare delle soluzioni delle equazioni (65.5). Tuttavia, dato che B non è più definita positiva, alcune soluzioni dell'equazione caratteristica possono non essere positive. In particolare, se $\omega_i^2 = 0$ si ha un moto rettilineo uniforme

$$Q_i(t) = c_i + s_i t,\tag{65.11}$$

mentre se $\omega_i^2 < 0$ si ha un moto esponenziale

$$Q_i(t) = c_i \cosh \omega_i t + s_i \sinh \omega_i t.\tag{65.12}$$

dove di nuovo c_i e s_i sono costanti che dipendono dalle condizioni iniziali. Ovviamente solo la condizione $\omega_i^2 > 0$ corrisponde a una effettiva oscillazione, di periodo $2\pi/\omega_i$. Se al contrario $\omega_i^2 \leq 0$ per qualche i allora le traiettorie si possono allontanare dalla posizione d'equilibrio e l'approssimazione lineare perde di significato.

Definizione 65.7 (PICCOLA OSCILLAZIONE) *Data la lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ in (64.1), sia $\mathcal{L}_2(q, \dot{q})$ in (64.5) la lagrangiana del sistema linearizzato nell'intorno di una posizione d'equilibrio stabile. Definiremo piccola oscillazione ogni soluzione del sistema descritto dalla lagrangiana $\mathcal{L}_2(q, \dot{q})$.*

Definizione 65.8 (OSCILLAZIONI PROPRIE) *Una soluzione delle equazioni del moto della forma*

$$q(t) = \mathcal{C}\bar{Q}_i(t), \quad (65.13)$$

dove $\bar{Q}_{ik}(t) = Q_i(t)\delta_{ik}$, i.e. il vettore $\bar{Q}_i(t)$ ha tutte le componenti nulle tranne la i -esima che è data dalla (65.10), prende il nome di oscillazione propria (o modo normale) e la frequenza ω_i prende il nome di frequenza propria (o frequenza principale o frequenza caratteristica o frequenza normale).

Corollario 65.9 *Dato il sistema descritto da una lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q})$, il sistema linearizzato in un intorno di un punto d'equilibrio stabile ammette n oscillazioni proprie in direzioni a due a due ortogonali rispetto al prodotto scalare indotto dall'energia cinetica. Ogni piccola oscillazione è la composizione di oscillazioni proprie.*

Dimostrazione. Dalla teorema 65.4 segue che

$$q_k(t) = \sum_{i=1}^n c_{ki} Q_i(t) = \sum_{i=1}^n \xi_{ik} Q_i(t), \quad (65.14)$$

dove \mathcal{C} è la matrice definita in (65.4). Quindi

$$q(t) = \sum_{i=1}^n Q_i(t) \xi_i, \quad (65.15)$$

i.e. $q(t)$ è combinazione lineare dei vettori ξ_1, \dots, ξ_n con coefficienti dipendenti dal tempo $Q_i(t)$. Si verifica facilmente che i vettori ξ_1, \dots, ξ_n , che individuano le direzioni delle oscillazioni proprie, sono ortogonali tra loro, rispetto al prodotto scalare indotto dall'energia cinetica, i.e.

$$\langle \xi_i, A\xi_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (65.16)$$

dove δ_{ij} è la delta di Kronecker (cfr. l'esercizio 5). ■

Osservazione 65.10 Si noti che la scomposizione delle piccole oscillazioni nei modi normali è corretta anche nel caso in cui si abbiano autovalori degeneri.

Esempio 65.11 Nel caso del sistema lagrangiano del §60, per valori dei parametri $m = g = k = 1$, si studino le piccole oscillazioni del sistema intorno a una posizione d'equilibrio stabile, risolvendo esplicitamente le equazioni del moto in funzione dei dati iniziali. Trovare in particolare la soluzione che corrisponde ai dati iniziali (espressi in coordinate cartesiane)

$$\begin{aligned} P_1 &= (0, 0), & P_2 &= (0, 0), & P_3 &= (0, 0), & P_4 &= (0, 0), & P_5 &= (0, -mg/2k), \\ \mathbf{v}_1 &= (0, 0), & \mathbf{v}_2 &= (0, 0), & \mathbf{v}_3 &= (u, 0), & \mathbf{v}_4 &= (w, 0), & \mathbf{v}_5 &= (0, 0), \end{aligned} \quad (65.17)$$

dove \mathbf{v}_i è la velocità del punto P_i e $u, w \in \mathbb{R}$.

Discussione dell'esempio. Usiamo le notazioni del §60. Si è visto che nel §60.4 che il sistema ammette le quattro posizioni d'equilibrio (60.16). In accordo con quanto richiesto, dobbiamo sceglierne una stabile: d'altra parte, dall'analisi del §60, segue che l'unica posizione d'equilibrio stabile è la prima, i.e. quella data dalla (60.26), quindi la scelta è obbligata.

Poiché $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3$ (cfr. le (60.17)), per le piccole oscillazioni possiamo considerare separatamente i tre sistemi lagrangiani (60.18). Dovendo studiare le piccole oscillazioni intorno alla posizione (60.26), occorre quindi sviluppare fino al secondo ordine \mathcal{L}_1 nell'intorno di $(\theta_1, x_3, \dot{\theta}_1, \dot{x}_3) = (0, 0, 0, 0)$, \mathcal{L}_2 nell'intorno di $(\theta_2, x_4, \dot{\theta}_2, \dot{x}_4) = (0, 0, 0, 0)$ e \mathcal{L}_3 nell'intorno di $(y, \dot{y}) = (y_0, 0)$.

Per \mathcal{L}_1 otteniamo quindi, se $z = (\theta_1, x_3)$, a meno di ordini superiori al secondo,

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} \langle \dot{z}, A\dot{z} \rangle - \frac{1}{2} \langle z, Bz \rangle, \quad (65.18)$$

dove A e B sono due le matrici 2×2 date da

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad B = \mathcal{H}(0, 0) = \begin{pmatrix} mg + k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix}. \quad (65.19)$$

L'equazione caratteristica per la determinazione delle frequenze proprie è allora

$$\det(B - \lambda A) = m^2 \lambda^2 - m(3k + mg)\lambda + 2k(mg + k) - k^2 = 0, \quad (65.20)$$

che, per $m = g = k = 1$, dà

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0, \quad (65.21)$$

le cui radici sono dunque $\lambda = 1$ e $\lambda = 3$. Le frequenze proprie sono allora

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = 1, \quad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{3}. \quad (65.22)$$

Le direzioni dei modi normali ξ_1 e ξ_2 sono tali che

$$(B - \lambda_j)\xi_j = 0, \quad j = 1, 2, \quad (65.23)$$

ovvero (tenendo conto che $m = g = k = 1$)

$$(2 - \lambda_1)\xi_{11} - \xi_{12} = \xi_{11} - \xi_{12} = 0, \quad (2 - \lambda_2)\xi_{21} - \xi_{22} = -\xi_{21} - \xi_{22} = 0; \quad (65.24)$$

quindi

$$\xi_1 = (1, 1), \quad \xi_2 = (-1, 1). \quad (65.25)$$

Nella base (ξ_1, ξ_2) le equazioni del moto sono

$$\ddot{Q}_1 = -\omega_1^2 Q_1, \quad \ddot{Q}_2 = -\omega_2^2 Q_2, \quad (65.26)$$

che ammettono soluzioni

$$Q_1(t) = a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t, \quad Q_2(t) = a_2 \cos \omega_2 t + b_2 \sin \omega_2 t, \quad (65.27)$$

dove le costanti a_1, a_2, b_1, b_2 dipendono dai dati iniziali nel modo seguente:

$$a_1 = Q_1(0), \quad b_1 = \frac{\dot{Q}_1(0)}{\omega_1}, \quad a_2 = Q_2(0), \quad b_2 = \frac{\dot{Q}_2(0)}{\omega_2}, \quad (65.28)$$

Introducendo la matrice

$$C = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} \\ \xi_{12} & \xi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (65.29)$$

risulta

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathcal{C} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \mathcal{C}^{-1} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (65.30)$$

così che

$$\begin{aligned} Q_1(0) &= \frac{\theta_1(0) + x_3(0)}{2}, & \dot{Q}_1(0) &= \frac{\dot{\theta}_1(0) + \dot{x}_3(0)}{2}, \\ Q_2(0) &= \frac{-\theta_1(0) + x_3(0)}{2}, & \dot{Q}_2(0) &= \frac{-\dot{\theta}_1(0) + \dot{x}_3(0)}{2}, \end{aligned} \quad (65.31)$$

che permette di esprimere i dati iniziali nelle variabili (Q_1, Q_2) in termini dei dati iniziali nelle variabili (θ_1, x_1) . In conclusione

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \frac{\theta_1(0) + x_3(0)}{2} \cos t + \frac{\dot{\theta}_1(0) + \dot{x}_3(0)}{2} \sin t + \frac{\theta_1(0) - x_3(0)}{2} \cos \sqrt{3}t + \frac{\dot{\theta}_1(0) - \dot{x}_3(0)}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t, \\ x_3(t) &= \frac{\theta_1(0) + x_3(0)}{2} \cos t + \frac{\dot{\theta}_1(0) + \dot{x}_3(0)}{2} \sin t - \frac{\theta_1(0) - x_3(0)}{2} \cos \sqrt{3}t - \frac{\dot{\theta}_1(0) - \dot{x}_3(0)}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t, \end{aligned}$$

e, analogamente, si trova per \mathcal{L}_2

$$\begin{aligned} \theta_2(t) &= \frac{\theta_2(0) + x_4(0)}{2} \cos t + \frac{\dot{\theta}_2(0) + \dot{x}_4(0)}{2} \sin t + \frac{\theta_2(0) - x_4(0)}{2} \cos \sqrt{3}t + \frac{\dot{\theta}_2(0) - \dot{x}_4(0)}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t, \\ x_4(t) &= \frac{\theta_2(0) + x_4(0)}{2} \cos t + \frac{\dot{\theta}_2(0) + \dot{x}_4(0)}{2} \sin t - \frac{\theta_2(0) - x_4(0)}{2} \cos \sqrt{3}t - \frac{\dot{\theta}_2(0) - \dot{x}_4(0)}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t, \end{aligned}$$

vista la completa simmetria tra \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 .

Per \mathcal{L}_3 abbiamo, a meno di costanti e di termini di ordine superiore al secondo,

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{2} \dot{y}^2 - (y - y_0)^2, \quad (65.32)$$

e quindi la frequenza propria del sistema risulta essere

$$\omega_3 = \sqrt{\lambda_3} = \sqrt{2}, \quad (65.33)$$

così che

$$y(t) = y_0 + y(0) \cos \sqrt{2}t + \frac{\dot{y}(0)}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}t. \quad (65.34)$$

In particolare la scelta dei dati iniziali data nel testo implica, in termini delle variabili lagrangiane,

$$\begin{aligned} \theta_1(0) = \theta_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = y(0) - y_0 &= 0, \\ \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = \dot{y}(0) &= 0, \quad \dot{x}_3(0) = u, \quad \dot{x}_4(0) = w, \end{aligned}$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \frac{u}{2} \sin t - \frac{u}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t, & x_3(t) &= \frac{u}{2} \sin t + \frac{u}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t, \\ \theta_2(t) &= \frac{w}{2} \sin t - \frac{w}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t, & x_4(t) &= \frac{w}{2} \sin t + \frac{w}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t, \\ y(t) &= y_0 = -\frac{mg}{2k} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

che dunque esprimono le piccole oscillazioni del sistema nell'intorno del punto d'equilibrio considerato.

§66 Piccole oscillazioni per pendoli accoppiati

66.1 Pendoli uguali

Consideriamo il sistema costituito da due pendoli di massa $m_1 = m_2 = 1$ e lunghezza $\ell_1 = \ell_2 = 1$, sospesi alla stessa quota. I pendoli sono sottoposti all'azione della gravità (poniamo $g = 1$) e sono collegati tra loro da una molla di costante elastica α e lunghezza a riposo uguale alla distanza d dei punti di sospensione; cfr. la figura 14.1. Chiameremo tale sistema un sistema di *pendoli accoppiati* (uguali). Assumiamo per semplicità $d = 1$.

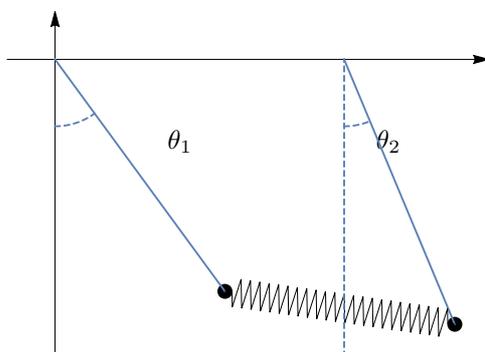


Figura 14.1: Pendoli accoppiati tramite un potenziale armonico.

Nell'approssimazione delle piccole oscillazioni il sistema è descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \alpha(\theta_1 - \theta_2)^2). \quad (66.1)$$

Infatti, se scegliamo un sistema di riferimento in cui i punti di sospensione dei pendoli abbiano coordinate $(0,0)$ e $(0,d)$ rispettivamente, allora i pendoli sono individuati dai punti $P_1 = (\sin \theta_1, -\cos \theta_1)$ e $P_2 = (d + \sin \theta_2, -\cos \theta_2)$. L'energia elastica della molla è data da (cfr. l'esercizio 7 del capitolo 12)

$$\begin{aligned} V_{\text{el}}(\theta_1, \theta_2) &= \frac{1}{2}\alpha \left(\sqrt{(d + \sin \theta_2 - \sin \theta_1)^2 + (-\cos \theta_2 + \cos \theta_1)^2} - d \right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\alpha \left(\sqrt{d^2 + 2 + 2d(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) - 2\cos(\theta_1 - \theta_2)} - d \right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\alpha d^2 \left(\sqrt{1 + 2d^{-1}(\theta_2 - \theta_1) + d^{-2}(\theta_1^2 + \theta_2^2 - 2\theta_1\theta_2) + \dots} - 1 \right)^2 + \dots \\ &= \frac{1}{2}\alpha d^2 \left(1 + \frac{\theta_2 - \theta_1}{d} + \dots - 1 \right)^2 + \dots, \end{aligned} \quad (66.2)$$

mentre l'energia dovuta alla forza gravitazionale è data da

$$V_{\text{gr}}(\theta_1, \theta_2) = -\cos \theta_1 - \cos \theta_2 = -1 + \frac{1}{2}\theta_1^2 - 1 + \frac{1}{2}\theta_2^2 + \dots = \text{cost.} + \frac{1}{2}\theta_1^2 + \frac{1}{2}\theta_2^2 + \dots, \quad (66.3)$$

dove con ... si indicano gli infinitesimi di ordine superiore al secondo; dalle (66.2) e (66.3) discende quindi la (66.1).

Il sistema (66.1) ammette due modi normali di frequenza $\omega_1 = 1$ e $\omega_2 = \sqrt{1 + 2\alpha}$. Questo si vede facilmente ragionando nel modo seguente. Definiamo la trasformazione di coordinate

$$Q_1 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{\sqrt{2}}, \quad Q_2 = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\sqrt{2}}, \quad (66.4)$$

di inversa

$$\theta_1 = \frac{Q_1 + Q_2}{\sqrt{2}}, \quad \theta_2 = \frac{Q_1 - Q_2}{\sqrt{2}}; \quad (66.5)$$

nelle variabili (66.4), la (66.1) diventa

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2) - \frac{1}{2}(\omega_1^2 Q_1^2 + \omega_2^2 Q_2^2). \quad (66.6)$$

Se $Q_2 = 0$ ($\theta_1 = \theta_2$), si ha un'oscillazione in fase con frequenza ω_1 (e la molla non compie lavoro); se $Q_1 = 0$ ($\theta_1 = -\theta_2$), si ha un'oscillazione in opposizione di fase con frequenza ω_2 ; cfr. la figura 14.2.

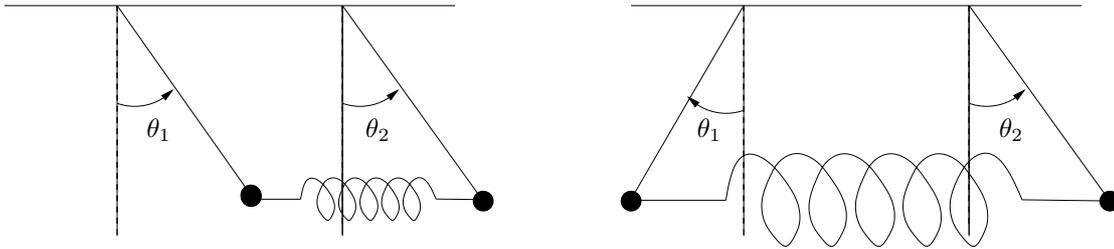


Figura 14.2: Oscillazioni in fase e in opposizione di fase.

Osservazione 66.1 Con le notazioni del §65, nel caso (66.1), per risolvere l'equazione caratteristica è sufficiente diagonalizzare la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 + \alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 + \alpha \end{pmatrix}, \quad (66.7)$$

dal momento che A è l'identità. Si vede subito che gli autovalori sono $\lambda_- = 1$ e $\lambda_+ = 1 + 2\alpha$, e i corrispondenti autovettori sono $(1, 1)$ e $(1, -1)$, che, una volta normalizzati, coincidono con le (66.5).

Se $\alpha \ll 1$, si ha un trasferimento periodico di energia dal primo al secondo pendolo: a tale fenomeno si dà il nome di *battimenti*. Supponiamo infatti di partire dalle condizioni iniziali $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0$, $\dot{\theta}_1(0) = v > 0$ e $\dot{\theta}_2(0) = 0$; quindi all'inizio tutta l'energia è immagazzinata nel primo pendolo (sotto forma di energia cinetica). Dalle (66.4) si ricava che, per $t = 0$, si ha $Q_1(0) = Q_2(0) = 0$ e $\dot{Q}_1(0) = \dot{Q}_2(0) = v/\sqrt{2}$, e quindi

$$Q_1(t) = \frac{v}{\sqrt{2}} \sin t, \quad Q_2(t) = \frac{v}{\omega_2 \sqrt{2}} \sin \omega_2 t, \quad (66.8)$$

così che, utilizzando le (66.5), otteniamo (cfr. l'esercizio 9)

$$\theta_1(t) = \frac{v}{2} \left(\sin t + \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right) = v \cos \varepsilon t \sin \omega t + O(\alpha), \quad (66.9a)$$

$$\theta_2(t) = \frac{v}{2} \left(\sin t - \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right) = -v \sin \varepsilon t \cos \omega t + O(\alpha), \quad (66.9b)$$

dove

$$\varepsilon = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \frac{\alpha}{2} + O(\alpha^2), \quad \omega = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} = 1 + \frac{\alpha}{2} + O(\alpha^2).$$

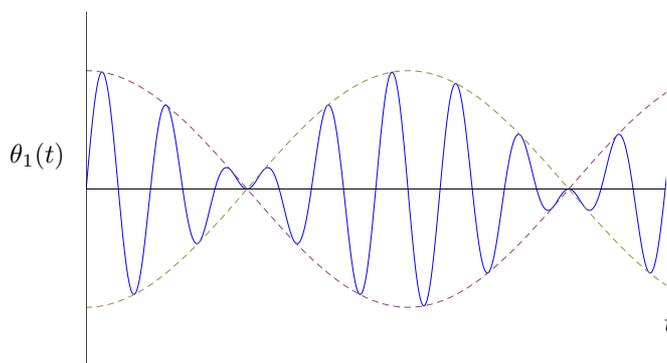


Figura 14.3: Battimenti: andamento dell'angolo $\theta_1(t) \approx v \cos \varepsilon t \sin \omega t$, con $\varepsilon = 0.1$ and $\omega = 1.1$.

Si ha quindi un moto oscillatorio di tipo sinusoidale, con periodo $T = 2\pi/\omega$, modulato da una curva sempre di tipo sinusoidale, ma con periodo molto più lungo ($2\pi/\varepsilon \gg 1$ per $\alpha \ll 1$); cfr. la figura 14.3. I termini $O(\alpha)$ in (66.9) si possono calcolare esplicitamente e si trova $O(\alpha) = ((1/\sqrt{1+2\alpha}) - 1) \sin(\omega t + \varepsilon t)$ per $\theta_1(t)$ e $O(\alpha) = -((1/\sqrt{1+2\alpha}) - 1) \sin(\omega t + \varepsilon t)$ per $\theta_2(t)$ (cfr. di nuovo l'esercizio 9): costituiscono quindi una correzione trigonometrica trascurabile (se α è piccolo), come mostrato in figura 14.4. Quando $t = \pi/2\varepsilon$, il moto di $\theta_1(t)$ si è quasi completamente smorzato, mentre $\theta_2(t)$ raggiunge un'ampiezza molto elevata, confrontabile con quella che aveva inizialmente q_1 (cfr. la figura 14.5), e così via periodicamente: si hanno continui trasferimenti d'energia da un modo normale all'altro.

66.2 Pendoli diversi

Consideriamo ora il caso di due pendoli con masse e lunghezze diverse ($m_1 \neq m_2$ e $\ell_1 \neq \ell_2$); assumiamo sempre $g = 1$ e $d = 1$, e, supponiamo, senza perdita di generalità che sia $\ell_1 > \ell_2$. Supponiamo anche per semplicità che i due pendoli siano collegati da una molla di lunghezza a riposo d_0 tale che $d_0^2 = d^2 + (\ell_1 - \ell_2)^2$, in modo tale che, nella configurazione di equilibrio, entrambi i pendoli siano in posizione verticale e quindi risulti $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = 0$.

Allora la lagrangiana diventa

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (m_1 \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 \ell_2^2 \dot{\theta}_2^2) - \frac{1}{2} (m_1 \ell_1 \theta_1^2 + m_2 \ell_2 \theta_2^2 + \alpha (\ell_1 \theta_1 - \ell_2 \theta_2)^2), \quad (66.10)$$

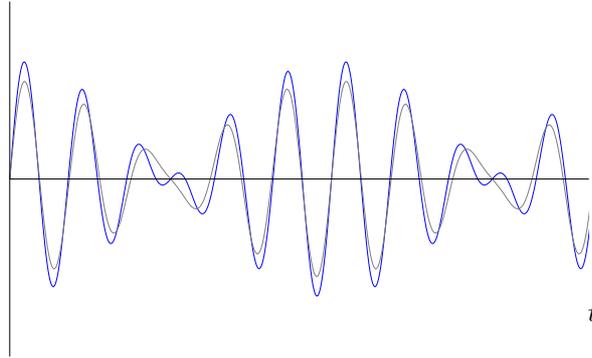


Figura 14.4: Confronto tra il valore esatto $\theta_1(t)$ e il valore di figura 14.3, per $\varepsilon = 0.1$ e $\omega = 1.1$.

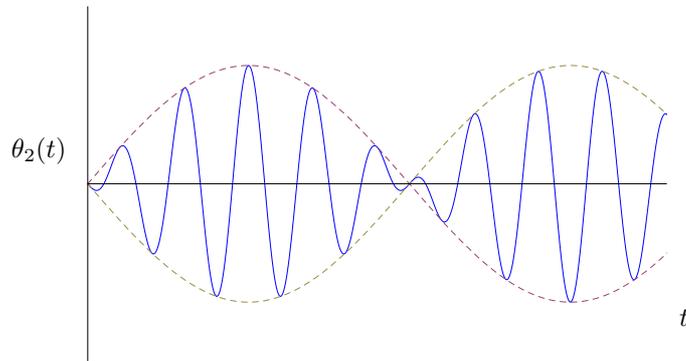


Figura 14.5: Battimenti: andamento dell'angolo $\theta_2 \approx -v \sin \varepsilon t \cos \omega t$, con $\varepsilon = 0.1$ and $\omega = 1.1$.

ridefinendo in modo opportuno α (in funzione di ℓ_1 e ℓ_2 ; cfr. l'esercizio 10), quindi le matrici A e B che compaiono nella lagrangiana quadratica (64.5) sono date da

$$A = \begin{pmatrix} m_1 \ell_1^2 & 0 \\ 0 & m_2 \ell_2^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m_1 \ell_1 + \alpha \ell_1^2 & -\alpha \ell_1 \ell_2 \\ -\alpha \ell_1 \ell_2 & m_2 \ell_2 + \alpha \ell_2^2 \end{pmatrix}, \quad (66.11)$$

e l'equazione caratteristica per la determinazione delle frequenze proprie (65.1) assume la forma

$$a\lambda^2 - (b_0 + b_1\alpha)\lambda + (c_0 + c_1\alpha) = 0, \quad (66.12)$$

dove

$$a = m_1 \ell_1^2 m_2 \ell_2^2, \quad (66.13a)$$

$$b_0 = m_1 \ell_1 m_2 \ell_2 (\ell_1 + \ell_2), \quad b_1 = (m_1 + m_2) \ell_1^2 \ell_2^2, \quad (66.13b)$$

$$c_0 = m_1 \ell_1 m_2 \ell_2, \quad c_1 = \ell_1 \ell_2 (m_1 \ell_2 + m_2 \ell_1). \quad (66.13c)$$

La (66.12) è, nel piano (λ, α) , l'equazione di un'iperbole (cfr. l'esercizio 11), con due asintoti, uno verticale, che interseca l'asse λ in $\omega_\infty^2 = c_1/b_1$, e l'altro obliquo, con pendenza a/b_1 ; cfr. la figura 14.6. Della regione del piano (λ, α) , l'unica significativa fisicamente è quella con $\lambda \geq 0$ e $\alpha \geq 0$.

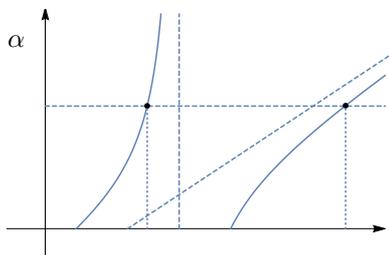


Figura 14.6: Piano (λ, α) per il sistema di due pendoli accoppiati.

Per $\alpha = 0$, abbiamo due valori di λ , dati da $\lambda_1 = \omega_1^2 = \ell_1^{-1}$ e $\lambda_2 = \omega_2^2 = \ell_2^{-1}$, che costituiscono le frequenze proprie dei pendoli disaccoppiati.

Al crescere di α , abbiamo due valori $\lambda_1 < \lambda_2$ che risolvono la (66.12), tali che $\lambda_2 \rightarrow \infty$ e $\lambda_1 \rightarrow \omega_\infty^2 = c_1/b_1$ per $\alpha \rightarrow \infty$. Dalle (66.13), si vede che

$$\omega_\infty^2 = \frac{m_1 \ell_2 + m_2 \ell_1}{(m_1 + m_2) \ell_1 \ell_2}, \quad (66.14)$$

che corrisponde alla frequenza propria del sistema descritto dalla lagrangiana (66.10), sottoposto al vincolo $\ell_1 \theta_1 = \ell_2 \theta_2$. Infatti, se definiamo

$$\ell := \frac{\ell_1 + \ell_2}{2}, \quad \theta := \frac{\ell_1 \theta_1 + \ell_2 \theta_2}{\ell_1 + \ell_2}, \quad (66.15)$$

vediamo che il vincolo $\ell_1 \theta_1 = \ell_2 \theta_2$ implica $\ell \theta = \ell_1 \theta_1 = \ell_2 \theta_2$, così che, in termini della variabile θ , la lagrangiana vincolata diventa

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \ell^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{m_1}{\ell_1} + \frac{m_2}{\ell_2} \right) \ell^2 \theta^2, \quad (66.16)$$

la cui frequenza propria è data dalla (66.14). In particolare, se $\ell_1 = \ell_2$, si ha $\ell = \ell_1 = \ell_2$ e $\theta = \theta_1 = \theta_2$: i due pendoli si muovono in sincronia con frequenza propria $1/\ell$. In tali condizioni il sistema si comporta come un pendolo di massa $m := m_1 + m_2$ e lunghezza ℓ .

Osservazione 66.2 Si noti che $\omega_1 \leq \omega_\infty \leq \omega_2$ (e l'uguaglianza vale solo nel caso $\ell_1 = \ell_2$), i.e. la frequenza del sistema vincolato è compresa tra le due frequenze del sistema senza il vincolo. Questo è un caso particolare di un risultato più generale; cfr. il teorema 67.15 e l'osservazione 67.16 più avanti.

Osservazione 66.3 Se $\ell_1 = \ell_2 = \ell$ e $m_1 = m_2 = m$, si ha $\omega_\infty^2 = \ell^{-1}$ e per $\alpha = 0$ risulta $\lambda_1 = \lambda_2 = \ell^{-1}$. Le relazioni (66.13) diventano

$$a = m^2 \ell^4, \quad (66.17a)$$

$$b_0 = 2m^2 \ell^3, \quad b_1 = 2m \ell^4, \quad (66.17b)$$

$$c_0 = m^2 \ell^2, \quad c_1 = 2m \ell^3, \quad (66.17c)$$

così che la (66.12) dà

$$0 = m \ell^3 \lambda^2 - 2(m \ell + \alpha) \lambda + (m \ell + 2\alpha) = (m \ell^2 \lambda - m \ell - 2\alpha) (\ell \lambda - 1) \quad (66.18)$$

che individua due rette, una verticale e una obliqua di pendenza $m\ell^2/2$, che si intersecano nel punto $(\lambda, \alpha) = (\omega_\infty^2, 0)$; cfr. la figura 14.7.

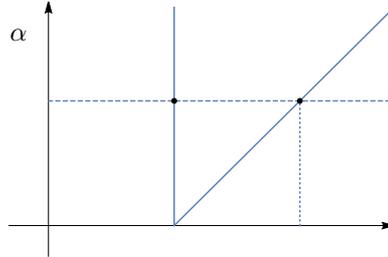


Figura 14.7: Piano (λ, α) nel caso di pendoli accoppiati identici.

Osservazione 66.4 Sia Σ la superficie di vincolo determinata dall'equazione $\ell_1\theta_1 = \ell_2\theta_2$ e sia W la funzione $W = (\ell_1\theta_1^2 - \ell_2\theta_2^2)/2$. Allora (Σ, W, α) costituisce un modello di vincolo approssimato perfetto, in accordo con la definizione (55.11); cfr. l'esercizio 12.

§67 Piccole oscillazioni per sistemi vincolati

In questo paragrafo vogliamo studiare come variano le frequenze delle piccole oscillazioni di un sistema meccanico conservativo quando o introduciamo dei vincoli o variamo i parametri dell'energia potenziale. In particolare siamo interessati al caso in cui il sistema divenga "più rigido", nel senso della definizione seguente.

Definizione 67.1 (RIGIDITÀ) *Consideriamo, nell'approssimazione delle piccole oscillazioni, due sistemi lagrangiani a n gradi di libertà S e S' che abbiano la stessa energia cinetica*

$$T = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, A(q)\dot{q} \rangle \quad (67.1)$$

ed energia potenziale, rispettivamente,

$$V = \frac{1}{2} \langle q, Bq \rangle, \quad V' = \frac{1}{2} \langle q, B'q \rangle. \quad (67.2)$$

Diremo che il sistema S' è più rigido del sistema S se

$$V(q) = \frac{1}{2} \langle q, Bq \rangle \leq \frac{1}{2} \langle q, B'q \rangle = V'(q) \quad \forall q \in \mathbb{R}^n. \quad (67.3)$$

Osservazione 67.2 Se consideriamo la struttura euclidea definita dall'energia cinetica, i.e. se scegliamo coordinate tali che la (67.1) divenga

$$T = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, \dot{q} \rangle, \quad (67.4)$$

possiamo associare a ogni sistema di energia potenziale (67.2) un ellissoide \mathcal{E} definito come

$$\mathcal{E} = \{q \in \mathbb{R}^n : \langle q, Bq \rangle = 1\}. \quad (67.5)$$

Lemma 67.3 *Se il sistema S' è più rigido del sistema S , i.e. se vale la (67.3), l'ellissoide \mathcal{E}' associato a S' giace dentro l'ellissoide \mathcal{E} associato a S .*

Dimostrazione. Fissata una direzione ξ , se indichiamo con $q = |q|\xi$ con $q' = |q'|\xi$ i punti degli ellissoidi \mathcal{E} e \mathcal{E}' , rispettivamente, nella direzione ξ , la condizione

$$|q|^2 \langle \xi, B\xi \rangle = \langle q, Bq \rangle = 1 = \langle q', B'q' \rangle = |q'|^2 \langle \xi, B'\xi \rangle$$

implica $|q'| \leq |q|$, come conseguenza della (67.3). ■

Lemma 67.4 *Nella base in cui l'energia cinetica è data dalla (67.4), le lunghezze dei semiassi principali di un ellissoide \mathcal{E} sono uguali agli inversi delle frequenze proprie, i.e. $a_i = \omega_i^{-1}$, $i = 1, \dots, n$.*

Dimostrazione. Nella base in cui l'energia cinetica è data dalla (67.4), gli assi principali dell'ellissoide sono diretti lungo gli autovettori di B , e, se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori della matrice B , la forma quadratica associata all'energia potenziale assume la forma

$$\langle q, Bq \rangle = \lambda_1 q_1^2 + \dots + \lambda_n q_n^2 = 1. \quad (67.6)$$

Quindi i semiassi principali hanno lunghezza $a_i = 1/\sqrt{\lambda_i} = 1/\omega_i$. ■

Teorema 67.5 *Siano S il sistema descritto dalla lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ e S' il sistema descritto dalla lagrangiana $\mathcal{L}_v(q, \dot{q})$ che si ottiene da $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ attraverso l'imposizione del vincolo olonomo regolare $G(q) = 0$. Sia $(q, \dot{q}) = (0, 0)$ una posizione d'equilibrio stabile per il sistema S compatibile con il vincolo, i.e. $G(0) = 0$: quindi $(0, 0)$ è una posizione d'equilibrio stabile anche per il sistema S' . Allora la lagrangiana del sistema linearizzato corrispondente a S' si ottiene dalla lagrangiana quadratica $\mathcal{L}_2(q, \dot{q})$ di S , imponendo il vincolo che si ottiene linearizzando $G(q) = 0$.*

Dimostrazione. Poiché il vincolo è regolare la funzione G è di classe C^2 e si ha $\nabla G(0) \neq 0$ (cfr. la definizione 36.6). In particolare possiamo assumere (rinumerando eventualmente le coordinate) che sia $[\partial G / \partial q_n](0) \neq 0$. Per il teorema della funzione implicita, possiamo esprimere q_n in funzione delle altre coordinate q_1, \dots, q_{n-1} ; se poniamo $q' = (q_1, \dots, q_{n-1})$, così che $q = (q', q_n)$, esiste allora una funzione $Q_n : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 tale che $q_n = Q_n(q')$ e, di conseguenza,

$$\dot{q}_n = \dot{Q}_n(q') = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial Q_n}{\partial q_i}(q') \dot{q}_i = \left\langle \frac{\partial Q_n}{\partial q'}(q'), q' \right\rangle,$$

dove il prodotto scalare è in \mathbb{R}^{n-1} . La lagrangiana, una volta introdotto il vincolo, diventa

$$\mathcal{L}_v(q, \dot{q}) = \mathcal{L}(q', Q_n(q'), \dot{q}', \dot{Q}_n(q')). \quad (67.7)$$

La linearizzazione di $G(q) = 0$ dà

$$q_n = Q_n^L(q') := - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i}{c_n} q_i, \quad (67.8)$$

dove $c_i = [\partial G / \partial q_i](0)$ per $i = 1, \dots, n$, così che $c_n \neq 0$, e, di conseguenza,

$$\dot{q}_n = \dot{Q}_n^L(q') = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial Q_n^L}{\partial q_i}(q') \dot{q}_i = - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i}{c_n} \dot{q}_i,$$

La parte quadratica di \mathcal{L}_v è data da

$$\mathcal{L}_{v2}(q, \dot{q}) = \mathcal{L}_2(q', Q_n^L(q'), \dot{q}', \dot{Q}_n^L(q')), \quad (67.9)$$

dove $\mathcal{L}_2(q', q_n, \dot{q}', \dot{q}_n)$ è la parte quadratica della lagrangiana \mathcal{L} . La verifica è immediata. ■

Osservazione 67.6 Ogni sottospazio \mathcal{V}^k di dimensione $k < n$ di \mathbb{R}^n si può immaginare come un “piano” passante per l’origine, generato da k vettori linearmente indipendenti. Si noti che \mathcal{V}^k è sempre isomorfo a \mathbb{R}^k (cfr. l’osservazione 1.39).

Osservazione 67.7 Sia S un sistema lagrangiano a n gradi di libertà in \mathbb{R}^n e siano T e V l’energia cinetica e l’energia potenziale di S . Dato un sottospazio \mathcal{V}^{n-1} di \mathbb{R}^n , di dimensione $n-1$, consideriamo il sistema S' con $n-1$ gradi di libertà che abbia energia cinetica e potenziale date dalle restrizioni di T e U a $T\mathcal{V}^{n-1}$. Il sistema linearizzato corrispondente a S' , ottenuto come prescritto dal teorema 67.5, ha $n-1$ frequenze proprie, che indicheremo con $\omega'_1, \dots, \omega'_{n-1}$. Se \mathcal{E} è l’ellissoide associato a S , al sistema S' è associato un ellissoide $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^{n-1}$ (cfr. l’esercizio 14).

Osservazione 67.8 Dato un ellissoide \mathcal{E} di dimensione n e un sottospazio vettoriale \mathcal{V}^k , con $k \leq n$, sia \mathcal{E}_k l’ellissoide ottenuto dall’intersezione di \mathcal{E} con \mathcal{V}^k . Allora

$$b_k := \min_{x \in \mathcal{E}_k} |x|$$

rappresenta la lunghezza del più piccolo semiasse di \mathcal{E}_k .

Lemma 67.9 (PRINCIPIO DEL MINIMAX) *Sia \mathcal{E} un ellissoide i cui semiasse abbiano lunghezza $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$. Ogni sezione di \mathcal{E} con un sottospazio k -dimensionale \mathcal{V}^k individua un ellissoide $\mathcal{E}_k = \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^k$. Comunque sia scelto \mathcal{V}^k , si ha*

$$a_k = \max_{\mathcal{V}^k} \min_{x \in \mathcal{E}_k} |x|, \quad (67.10)$$

i.e. la lunghezza del semiasse più piccolo di \mathcal{E}_k è minore o uguale ad a_k . In (67.10) il massimo è raggiunto quando si sceglie come \mathcal{V}^k il sottospazio generato dai k vettori diretti lungo gli assi principali di lunghezza $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k$.

Dimostrazione. Consideriamo il sottospazio \mathcal{V}^{n-k+1} individuato dai semiasse di lunghezza $a_k \geq a_{k+1} \geq \dots \geq a_n$. Poiché la sua dimensione è $n-k+1$, si ha $\mathcal{V}^{n-k+1} \cap \mathcal{V}^k \neq \emptyset$. Sia $x \in \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^{n-k+1} \cap \mathcal{V}^k$: poiché $x \in \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^{n-k+1}$, deve essere $|x| \leq a_k$, e, poiché $x \in \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^k$, allora $|x|$ deve essere più grande della lunghezza b_k del più piccolo semiasse di \mathcal{E}_k , i.e. $|x| \geq b_k$. Quindi $a_k \geq b_k$. Se in particolare scegliamo \mathcal{V}^k come il sottospazio individuato dai semiasse di lunghezza $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k$, allora, per $x \in \mathcal{E}_k = \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^k$, si ha $b_k = a_k$. Da qui segue la (67.10). ■

Lemma 67.10 *Se l'ellissoide \mathcal{E} con semiassi di lunghezza $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ contiene l'ellissoide \mathcal{E}' con semiassi di lunghezza $a'_1 \geq a'_2 \geq \dots \geq a'_n$, allora*

$$a_1 \geq a'_1, \quad a_2 \geq a'_2, \quad \dots \quad a_n \geq a'_n, \quad (67.11)$$

i.e. le lunghezze di tutti i semiassi dell'ellissoide interno sono minori di quelle dei semiassi corrispondenti dell'ellissoide esterno.

Dimostrazione. Dato un qualsiasi sottospazio \mathcal{V}^k di dimensione k , la lunghezza b'_k del più piccolo semiasse dell'ellissoide $\mathcal{E}'_k = \mathcal{E}' \cap \mathcal{V}^k$ è minore della lunghezza b_k del più piccolo semiasse di $\mathcal{E}_k = \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^k$, i.e. $b'_k \leq b_k$; cfr. l'esercizio 15. Sia $\bar{\mathcal{V}}^k$ il sottospazio in corrispondenza del quale b'_k , visto come funzione di \mathcal{V}^k , raggiunge il suo valore massimo. Se indichiamo tale valore con B'_k e se B_k denota la lunghezza del più piccolo semiasse di $\mathcal{E} \cap \bar{\mathcal{V}}^k$, otteniamo $B'_k \leq B_k$. Si ha quindi

$$a'_k = \max_{\mathcal{V}^k} \min_{x \in \mathcal{E}'_k} |x| = \max_{\xi \in \mathcal{V}^k} b'_k = B'_k \leq B_k \leq \max_{\mathcal{V}^k} \min_{x \in \mathcal{E}_k} |x| = a_k, \quad (67.12)$$

dove è stata usata la (67.10) sia per \mathcal{E} che per \mathcal{E}' . ■

Teorema 67.11 *Indichiamo con \mathcal{E}' l'intersezione dell'ellissoide \mathcal{E} con semiassi di lunghezza $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ con un sottospazio \mathcal{V}^{n-1} di dimensione $n-1$. Allora, se $a'_1 \geq a'_2 \geq \dots \geq a'_{n-1}$ sono le lunghezze dei semiassi di \mathcal{E}' , si ha*

$$a_1 \geq a'_1 \geq a_2 \geq a'_2 \geq \dots \geq a'_{n-1} \geq a_n, \quad (67.13)$$

i.e. le lunghezze dei semiassi dell'ellissoide \mathcal{E}' separano quelle dei semiassi di \mathcal{E} .

Dimostrazione. La disuguaglianza $a'_k \leq a_k$ segue dal lemma 67.9, poiché

$$a'_k = \max_{\mathcal{V}^k \subset \mathcal{V}^{n-1}} \min_{x \in \mathcal{E}'_k} |x| \leq \max_{\mathcal{V}^k \subset \mathbb{R}^n} \min_{x \in \mathcal{E}_k} |x| = a_k, \quad (67.14)$$

dove $\mathcal{E}'_k = \mathcal{E}' \cap \mathcal{V}^k$ e $\mathcal{E}_k = \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^k$. Infatti, per $\mathcal{V}^k \subset \mathcal{V}^{n-1}$ si ha $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}'_k$, e quindi per calcolare a_k il massimo è fatto su un insieme più grande che per calcolare a'_k .

Per dimostrare che $a'_k \geq a_{k+1}$, consideriamo l'intersezione di \mathcal{V}^{n-1} con un sottospazio \mathcal{V}^{k+1} di dimensione $k+1$. La dimensione d di $\mathcal{V}^{n-1} \cap \mathcal{V}^{k+1}$ è non più piccola di k :

- se $\mathcal{V}^{k+1} \subset \mathcal{V}^{n-1}$ si ha $d = k+1$,
- se $\mathcal{V}^{k+1} = \mathcal{V}^k \times (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{V}^{n-1})$ si ha $d = k$.

Inoltre la lunghezza \tilde{b}'_k del semiasse più piccolo di $\tilde{\mathcal{E}}'_k = \mathcal{E}' \cap \mathcal{V}^{k+1}$ è maggiore della lunghezza b_{k+1} del semiasse più piccolo di $\mathcal{E}_{k+1} = \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^{k+1}$, poiché

$$b_{k+1} = \min_{x \in \mathcal{E}_{k+1}} |x| \leq \min_{x \in \mathcal{E}_{k+1} \cap \mathcal{V}^{n-1}} |x| = \min_{x \in \tilde{\mathcal{E}}'_k} |x| = \tilde{b}'_k, \quad (67.15)$$

dove si è usato che si ha

$$\mathcal{E}_{k+1} \cap \mathcal{V}^{n-1} = \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^{k+1} \cap \mathcal{V}^{n-1} = \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^{n-1} \cap \mathcal{V}^{k+1} = \mathcal{E}' \cap \mathcal{V}^{k+1} = \tilde{\mathcal{E}}'_k$$

e che, nella definizione di \tilde{b}'_k , il minimo è preso su un insieme più piccolo rispetto alla definizione di b_{k+1} . Quindi per il lemma 67.9 si ha

$$\max_{\mathcal{V}^{k+1} \subset \mathbb{R}^n} \min_{x \in \tilde{\mathcal{E}}'_k} |x| \geq \max_{\mathcal{V}^{k+1} \subset \mathbb{R}^n} \min_{x \in \mathcal{E}_{k+1}} |x| = a_{k+1}. \quad (67.16)$$

Inoltre se $\mathcal{V}^{k+1} = \mathcal{V}^k \times (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{V}^{n-1})$ si ha $\mathcal{E}'_k = \tilde{\mathcal{E}}'_k$, poiché

$$\tilde{\mathcal{E}}'_k = \mathcal{E}' \cap \mathcal{V}^{k+1} = \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^{n-1} \cap \mathcal{V}^{k+1} = \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^{n-1} \cap \mathcal{V}^k = \mathcal{E}' \cap \mathcal{V}^k = \mathcal{E}'_k,$$

mentre se $\mathcal{V}^{k+1} \subset \mathcal{V}^{n-1}$ sia ha $\mathcal{E}'_k \subset \tilde{\mathcal{E}}'_k$, dove l'inclusione vale con il segno stretto (i.e. $\tilde{\mathcal{E}}'_k \neq \mathcal{E}'_k$), poiché $\tilde{\mathcal{E}}'_k = \mathcal{E}' \cap \mathcal{V}^{k+1}$ e $\mathcal{V}^k \subset \mathcal{V}^{k+1} \subset \mathcal{V}^{n-1}$. Quindi

$$\begin{aligned} \max_{\mathcal{V}^{k+1} \subset \mathbb{R}^n} \min_{x \in \tilde{\mathcal{E}}'_k} |x| &= \max \left\{ \max_{\mathcal{V}^{k+1} \subset \mathcal{V}^{n-1}} \min_{x \in \tilde{\mathcal{E}}'_k} |x|, \max_{\mathcal{V}^{k+1} = \mathcal{V}^k \times (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{V}^{n-1})} \min_{x \in \tilde{\mathcal{E}}'_k} |x| \right\} \\ &= \max \left\{ \max_{\mathcal{V}^{k+1} \subset \mathcal{V}^{n-1}} \min_{x \in \tilde{\mathcal{E}}'_k} |x|, \max_{\mathcal{V}^{k+1} = \mathcal{V}^k \times (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{V}^{n-1})} \min_{x \in \mathcal{E}'_k} |x| \right\} \end{aligned} \quad (67.17)$$

e risulta

$$\max_{\mathcal{V}^{k+1} \subset \mathcal{V}^{n-1}} \min_{x \in \tilde{\mathcal{E}}'_k} |x| \leq \max_{\mathcal{V}^{k+1} \subset \mathcal{V}^{n-1}} \min_{x \in \mathcal{E}'_k} |x| = \max_{\mathcal{V}^k \subset \mathcal{V}^{n-1}} \min_{x \in \mathcal{E}'_k} |x|, \quad (67.18)$$

dove la disuguaglianza segue dal fatto che il minimo è calcolato su un insieme \mathcal{E}'_k più piccolo di $\tilde{\mathcal{E}}'_k$ e la successiva uguaglianza dal fatto che si può cambiare $\mathcal{V}^{k+1} \setminus \mathcal{V}^k$ senza alterare \mathcal{E}'_k . In conclusione si ha

$$\max_{\mathcal{V}^{k+1} \subset \mathbb{R}^n} \min_{x \in \tilde{\mathcal{E}}'_k} |x| \leq \max \left\{ \max_{\mathcal{V}^k \subset \mathcal{V}^{n-1}} \min_{x \in \mathcal{E}'_k} |x|, \max_{\mathcal{V}^k \subset \mathcal{V}^{n-1}} \min_{x \in \mathcal{E}'_k} |x| \right\} \leq \max_{\mathcal{V}^k \subset \mathcal{V}^{n-1}} \min_{x \in \mathcal{E}'_k} |x| = a'_k, \quad (67.19)$$

dove si è utilizzato di nuovo il lemma 67.9. Dalle (67.16) e (67.19) segue quindi che si ha $a'_k \geq a_{k+1}$. ■

Osservazione 67.12 La dimostrazione del teorema 67.11 diventa banale se $n = 2$. In tal caso l'intersezione dell'ellissoide \mathcal{E} di semiassi $a_1 \geq a_2$ con un sottospazio di dimensione 1 (i.e. con una retta) dà due punti antipodali sull'ellisse, la cui distanza dall'origine è compresa tra la lunghezza della semiassi maggiore e quella del semiassi minore; cfr. la figura 14.8.

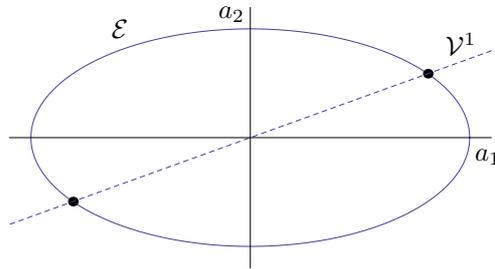


Figura 14.8: Ellissoidi \mathcal{E} ed $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^1$ nel caso $n = 2$.

Teorema 67.13 *Se consideriamo due sistemi S e S' , con S' più rigido di S , si ha allora*

$$\omega_1 \leq \omega'_1, \quad \omega_2 \leq \omega'_2, \quad \dots \quad \omega_n \leq \omega'_n, \quad (67.20)$$

se $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$ sono le frequenze proprie di S e $\omega'_1 \leq \omega'_2 \leq \dots \leq \omega'_n$ sono le frequenze proprie di S' .

Dimostrazione. Segue dal lemma 67.10, tenendo conto del lemma 67.3 e del lemma 67.4. ■

Osservazione 67.14 Il teorema 67.13 si può interpretare dicendo che se aumentiamo la rigidità di un sistema meccanico, le frequenze proprie aumentano. Analogamente, attraverso considerazioni di similitudine, possiamo concludere che, se aumentiamo l'energia cinetica, senza cambiare l'energia potenziale del sistema, le frequenze proprie diminuiscono.

Teorema 67.15 (TEOREMA DI RAYLEIGH-COURANT-FISCHER) *Le frequenze proprie del sistema vincolato S' ottenuto dal sistema S con frequenze proprie $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$ sono tali che*

$$\omega_1 \leq \omega'_1 \leq \omega_2 \leq \omega'_2 \leq \dots \leq \omega'_{n-1} \leq \omega_n, \quad (67.21)$$

se $\omega'_1 \leq \omega'_2 \leq \dots \leq \omega'_{n-1}$ sono le frequenze proprie di S' .

Dimostrazione. Segue dal teorema 67.11, tenendo conto del lemma 67.4. ■

Osservazione 67.16 Nell'esempio dei due pendoli accoppiati discusso nel §66.2, se consideriamo il limite $\alpha \rightarrow \infty$ (rigidità che tende all'infinito), otteniamo un sistema vincolato con un solo grado di libertà: la frequenza propria ω_∞ del sistema risultante, data dalla (66.14), soddisfa la relazione $\omega_1 \leq \omega_\infty \leq \omega_2$ consistentemente con il teorema 67.15 (cfr. l'osservazione 66.2).

Nota bibliografica Per i paragrafi §66 e 67, abbiamo seguito essenzialmente [1, Cap. V].

Esercizi

Esercizio 1 Sia A una matrice $n \times n$ simmetrica invertibile. Si dimostri che A^{-1} è simmetrica. [*Soluzione.* La matrice A è simmetrica se e solo se $\langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle \forall x, y \in \mathbb{R}^n$. Siano $x', y' \in \mathbb{R}^n$ arbitrari. Poiché A è invertibile, se $x = A^{-1}x'$ e $y = A^{-1}y'$, si ha $\langle x', A^{-1}y' \rangle = \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle = \langle A^{-1}x', y' \rangle$, quindi A^{-1} è simmetrica.]

Esercizio 2 Siano A e B due matrici $n \times n$ simmetriche. Si dimostri che ABA è simmetrica e che se A e B sono definite positive allora anche ABA è definita positiva. [*Soluzione* Si ha $(ABA)^T = A^T B^T A^T = ABA$. Sia A definita positiva. Se B è definita positiva si ha $\langle x, Bx \rangle \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ e vale l'eguaglianza se e solo se $x = 0$. Si consideri il prodotto scalare $\langle v, ABAv \rangle$ per $v \in \mathbb{R}^n$. Si ha $\langle v, ABAv \rangle = \langle Av, BAv \rangle = \langle x, Bx \rangle$, dove $x := Av$. Quindi $\langle v, ABAv \rangle \geq 0 \forall v \in \mathbb{R}^n$. Inoltre $\langle v, ABAv \rangle = 0$ se e solo se $x = Av = 0$ e quindi se e solo se $v = 0$ (poiché $\det A \neq 0$ implica che $Av = 0$ se e solo se $v = 0$).]

Esercizio 3 Siano α e B due matrici simmetriche definite positive. Si dimostri che $\beta = \alpha^{-1}B\alpha^{-1}$ è anch'essa una matrice simmetrica definita positiva. [*Suggerimento.* Poiché α è simmetrica, anche α^{-1} è simmetrica (cfr. l'esercizio 1). Quindi β è anch'essa simmetrica (cfr. l'esercizio 2). Inoltre, dato un qualsiasi vettore $x \in \mathbb{R}^n$, si ha $\langle x, \beta x \rangle = \langle \alpha^{-1}x, B\alpha^{-1}x \rangle = \langle w, Bw \rangle$, dove $w = \alpha^{-1}x$; poiché $\det \alpha \neq 0$ e $\langle w, Bw \rangle > 0 \forall w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, segue che $\langle x, \beta x \rangle > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.]

Esercizio 4 Si dimostri che l'equazione matriciale (65.6) corrisponde alle n equazioni vettoriali (65.3). [Soluzione. Scrivendo per componenti le (65.3) si ha

$$\sum_{j=1}^n B_{kj} \xi_{ij} = \sum_{j=1}^n \lambda_i A_{kj} \xi_{ij},$$

che, utilizzando la definizione (65.4) di C e introducendo la matrice diagonale D di elementi $D_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ (con δ_{ij} la delta di Kronecker), si può riscrivere

$$\sum_{j=1}^n B_{kj} C_{ji} = \sum_{j=1}^n \lambda_i A_{kj} C_{ji} = \sum_{j,h=1}^n A_{kj} C_{ji} D_{ih} = \sum_{j,h=1}^n A_{kj} C_{ji} D_{hi},$$

che, in forma matriciale, diventa $BC = ACD$.]

Esercizio 5 Si dimostri la (65.16). [Soluzione. Definiamo $w_i := \alpha \xi_i$ e $\beta := \alpha^{-1} B \alpha^{-1}$. Poiché ξ_i risolve l'equazione la (65.4), si ha $B \xi_i = \lambda_i A \xi_i$ e quindi $\beta w_i = \lambda_i w_i$, i.e. w_i è l'autovettore di β associato all'autovalore λ_i . Poiché β è simmetrica (cfr. l'esercizio 3) i suoi autovettori sono ortogonali e quindi $\langle w_i, w_j \rangle = \delta_{ij}$.]

Esercizio 6 Si dimostri che la matrice C definita da (65.4) è non singolare. [Soluzione. Tenendo conto dell'esercizio 5, si ha

$$\delta_{ij} = \langle \xi_i, A \xi_j \rangle = \sum_{k,h=1}^n \xi_{ik} A_{kh} \xi_{jh} = \sum_{k,h=1}^n C_{ki} A_{kh} C_{jh} = \sum_{k,h=1}^n C_{jh} A_{hk} C_{ki} = (CAC)_{ji},$$

i.e. $CAC = \mathbb{1}$. Quindi $1 = \det \mathbb{1} = (\det C)^2 \det A$ e, poiché $\det A \neq 0$, si ha $\det C \neq 0$.]

Esercizio 7 Siano $\langle q, Aq \rangle$ e $\langle q, Bq \rangle$ due forme quadratiche in \mathbb{R}^n , di cui la prima sia definita positiva. Si dimostri che è possibile diagonalizzarle entrambe con un'unica trasformazione di coordinate, i.e. esiste una base $\{w_1, \dots, w_n\}$ in cui le due forme quadratiche sono rappresentate entrambe da matrici diagonali. [Suggerimento. Poiché $\langle q, Aq \rangle$ è definita positiva, la matrice simmetrica A è definita positiva e quindi esiste una matrice simmetrica definita positiva α tale che $A = \alpha^2$ (cfr. la dimostrazione del lemma 65.1). Se definiamo $v = \alpha q$, possiamo riscrivere $\langle q, Aq \rangle = \langle v, v \rangle$ e $\langle q, Bq \rangle = \langle v, \beta v \rangle$, dove $\beta = \alpha^{-1} B \alpha^{-1}$ è una matrice simmetrica (si ragiona come nell'esercizio 3): quindi esiste una matrice ortogonale U tale che la matrice $D := U \beta U^{-1}$ è diagonale. Se $D_{ii} = \lambda_i$, si ha $\beta w_i = \lambda_i w_i$ per $i = 1, \dots, n$: $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori di β e w_1, \dots, w_n gli autovettori associati. Si ha $\langle v, v \rangle = \langle w, w \rangle$ e $\langle v, \beta v \rangle = \langle w, D w \rangle$. Quindi nella base degli autovettori di β le forme quadratiche sono entrambe rappresentate da due matrici diagonali: la prima è l'identità e la seconda è la matrice diagonale i cui elementi diagonali sono gli autovalori di β .

Esercizio 8 Si discuta la relazione tra i vettori ξ_i che risolvono l'equazione (65.3) e i vettori w_i introdotti nell'esercizio 7. [Suggerimento. Si ha $w_i = \alpha \xi_i$ per $i = 1, \dots, n$: cfr. l'esercizio 5.]

Esercizio 9 Si dimostrino le equazioni (66.9) e si calcolino esplicitamente le correzioni $O(\alpha)$. [Suggerimento. Definendo $\varepsilon = (\omega_2 - \omega_1)/2$ e $\omega = (\omega_2 + \omega_1)/2$ si può scrivere $1 = \omega_1 = \omega + \varepsilon$ e $\omega_2 = \omega + \varepsilon$. Quindi, sviluppando $1/\omega_2 = 1/\sqrt{1 + 2\alpha} = 1 + O(\alpha)$, si possono utilizzare le identità trigonometriche

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha,$$

per riscrivere $\sin t \pm \sin \omega_2 t = \sin(\omega t - \varepsilon t) \pm \sin(\omega t + \varepsilon t)$.]

Esercizio 10 Si derivi l'energia potenziale (66.10). [Soluzione. L'energia potenziale elastica è data da

$$V_{el}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} \alpha \left(\sqrt{(d + \ell_2 \sin \theta_2 - \ell_1 \sin \theta_1)^2 + (\ell_2 \cos \theta_2 - \ell_1 \cos \theta_1)^2} - d_0 \right)^2,$$

quindi, sviluppando intorno a $\theta_1 = \theta_2 = 0$, si trova

$$V_{\text{el}}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} \alpha' (\ell_1 \theta_1 - \ell_2 \theta_2)^2 + \dots, \quad \alpha' = \alpha \frac{d}{d_0}.$$

Allora, purché si ridenomini $\alpha' \mapsto \alpha$, si ottiene la (66.10).]

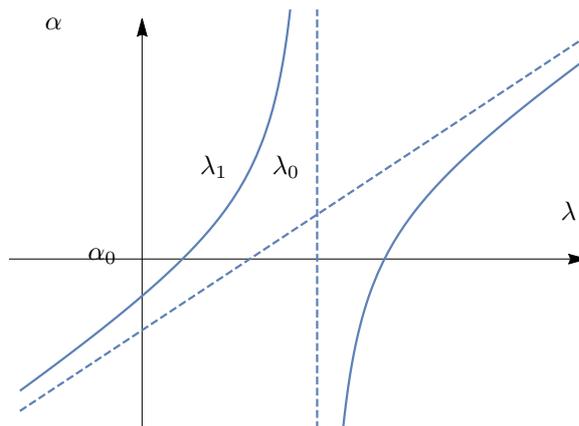


Figura 14.9: Iperbole dell'esercizio 11.

Esercizio 11 Si dimostri che l'equazione (66.12) descrive un'iperbole e si verifichino le proprietà descritte dopo la (66.13). [*Suggerimento.* La (66.12) è un'equazione di una conica (cfr. l'esercizio 7 del capitolo 7): il discriminante corrispondente è allora dato da $\Delta = b_1^2$ ed è quindi strettamente positivo. Possiamo inoltre rendere esplicita in (66.12) la dipendenza di α da λ , ottenendo (cfr. la figura 14.9)

$$\alpha = \frac{a\lambda^2 - b_0\lambda + c_0}{b_1\lambda - c_1}.$$

Quindi α in funzione di λ ha un asintoto verticale per $\lambda = \lambda_1 := c_1/b_1$ e un asintoto obliquo con pendenza a/b_1 che interseca l'asse α in $\alpha = \alpha_0 := b_1^{-2}(ac_1 - b_0b_1)$ e l'asse λ in $\lambda = \lambda_0 := (ab_1)^{-1}(b_0b_1 - ac_1)$.]

Esercizio 12 Con le notazioni dell'osservazione 66.4, si verifichi che (Σ, W, α) è un modello di vincolo approssimato perfetto. [*Suggerimento.* Si dimostra che sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Arnol'd-Gallavotti (teorema 56.1). Se definiamo

$$\theta = \frac{\ell_1\theta_1 - \ell_2\theta_2}{\ell_1 + \ell_2}, \quad \Theta = \frac{m_1\ell_1\theta_1 + m_2\ell_2\theta_2}{m_1\ell_1 + m_2\ell_2},$$

allora (θ, Θ) costituisce un sistema di coordinate bene adattato e regolare (cfr. la definizione 55.7). Infatti, in termini di tali coordinate, la lagrangiana (66.10) diventa

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{(m_1\ell_1 + m_2\ell_2)^2}{m_1 + m_2} \dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} (\ell_1 + \ell_2)^2 \dot{\theta}^2 - \bar{V}(\theta, \Theta) - \alpha \bar{W}(\theta),$$

dove

$$\bar{W}(\theta) = \frac{1}{2} \alpha (\ell_1 + \ell_2)^2 \theta^2,$$

$$\bar{V}(\theta, \Theta) = \frac{1}{2} \frac{m_1\ell_2 + m_1\ell_2}{\ell_1\ell_2} \left(\frac{(m_1\ell_1 + m_2\ell_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} \Theta^2 + m_1m_2(\ell_1 + \ell_2) ((\ell_1 + \ell_2)\theta^2 + 2(\ell_2 - \ell_1)\theta\Theta) \right),$$

quindi la matrice cinetica (cfr. la definizione 55.3) è diagonale e gli elementi diagonali sono costanti. Inoltre $\bar{W}(\theta)$ dipende solo da θ e soddisfa le ipotesi del teorema.]

Esercizio 13 Sia π l'iperpiano in \mathbb{R}^n passante per l'origine individuato dall'equazione $\langle c, q \rangle = c_1 q_1 + \dots + c_n q_n = 0$. Si dimostri che esiste una matrice ortogonale S tale, se $q = Sy$, allora nelle variabili y l'equazione dell'iperpiano diventa $y_n = 0$. [Soluzione. Il vettore c è ortogonale all'iperpiano. Poniamo $v_n = c/|c|$ e siano v_1, \dots, v_{n-1} tali che $\{v_1, \dots, v_n\}$ costituisca una base ortonormale in \mathbb{R}^n . Definiamo la matrice S richiedendo $S_{ij} = v_{ji}$, dove v_{ji} è la componente i del vettore v_j . La matrice S è ortogonale poiché

$$(S^T S)_{ij} = \sum_{k=1}^n S_{ki} S_{kj} = \sum_{k=1}^n v_{ik} v_{jk} = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij},$$

dove δ_{ij} è la delta di Kronecker, così che $S^T S = \mathbb{1}$. Si ha allora $y = S^{-1}q = S^T q$, così che

$$y_n = \sum_{k=1}^n (S^T)_{kn} q_k = \sum_{k=1}^n S_{kn} q_k = \sum_{k=1}^n v_{nk} q_k = \frac{1}{|c|} \sum_{k=1}^n c_k q_k = \frac{1}{|c|} \langle c, q \rangle,$$

che implica $y_n = 0$ se $q \in \pi$.]

Esercizio 14 Sia S un sistema lagrangiano a n gradi di libertà e sia S' il sistema ottenuto imponendo un vincolo olonomo bilatero. Sia \mathcal{V}^{n-1} l'iperpiano individuato dalla linearizzazione del vincolo. Si dimostri che se \mathcal{E} è l'ellissoide associato a S , allora l'ellissoide \mathcal{E}' associato al sistema S' è dato da $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^{n-1}$ (cfr. l'osservazione 67.7). [Soluzione. Sia

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, \dot{q} \rangle - \frac{1}{2} \langle q, Bq \rangle$$

la lagrangiana del sistema S nelle coordinate in cui l'energia cinetica abbia la forma (67.4). Si consideri la trasformazione di coordinate $y = S^T q$, con S ortogonale, tale che nelle variabili y l'iperpiano \mathcal{V}^{n-1} abbia equazione $y_n = 0$ (cfr. l'esercizio 13). si ha allora

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \langle S\dot{y}, S\dot{y} \rangle - \frac{1}{2} \langle Sy, BSy \rangle = \frac{1}{2} \langle \dot{y}, S^T S \dot{y} \rangle - \frac{1}{2} \langle y, S^T BSy \rangle = \frac{1}{2} \langle \dot{y}, \dot{y} \rangle - \frac{1}{2} \langle y, S^T BSy \rangle$$

così che, se scriviamo $y = (y', y_n)$, dove $y' = (y_1, \dots, y_{n-1})$, la lagrangiana vincolata diventa

$$\mathcal{L}_v = \frac{1}{2} \langle \dot{y}', \dot{y}' \rangle - \frac{1}{2} \langle (y', 0), S^T BS(y', 0) \rangle$$

dove il primo prodotto scalare è in \mathbb{R}^{n-1} e il secondo è in \mathbb{R}^n . Quindi l'ellissoide del sistema vincolato S' è

$$\begin{aligned} \mathcal{E}' &= \{y' \in \mathbb{R}^{n-1} : \langle (y', 0), S^T BS(y', 0) \rangle = 1\} = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle (y', 0), S^T BS(y', 0) \rangle = 1, y_n = 0\} \\ &= \{q \in \mathbb{R}^n : \langle q, Bq \rangle = 1, q \in \mathcal{V}^{n-1}\} = \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^{n-1}, \end{aligned}$$

da cui segue l'asserto.]

Esercizio 15 Siano \mathcal{E} ed \mathcal{E}' due ellissoidi, con \mathcal{E}' contenuto all'interno di \mathcal{E} , e sia \mathcal{V}^k un qualsiasi sottospazio di \mathbb{R}^n . Definiamo $\mathcal{E}'_k = \mathcal{E}' \cap \mathcal{V}^k$ e $\mathcal{E}_k = \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^k$, e indichiamo con b_k e $b_{k'}$ i più piccoli semiassi di \mathcal{E}_k e, rispettivamente, \mathcal{E}'_k . Si dimostri che risulta $b'_k \leq b_k$. [Soluzione. Sia b_k la lunghezza del semiassi più piccolo di \mathcal{E}_k e sia ξ la sua direzione: quindi $b_k \xi \in \mathcal{E}$. Se b'_k è la lunghezza del più piccolo semiassi di \mathcal{E}'_k allora per ogni $q' \in \mathcal{E}'_k$ si ha $b_{k'} \leq |q'|$; inoltre, se si sceglie $q' = |q'| \xi$ si ha $|q'| \leq b_k$ poiché \mathcal{E}' è interno a \mathcal{E} .]

Esercizio 16 Alla luce dell'osservazione 67.12, si interpreti geometricamente il teorema 67.11 per $n = 3$.