Esercizio 6 Dato un sistema di N punti nello spazio euclideo tridimensionale e dato un sistema di coordinate cartesiane x, siano ξ_1, ξ_2, ξ_3 i campo vettoriali associati alle rotazioni rigide intorno agli assi $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, rispettivamente. Si dimostri che le componenti dei campi vettoriali sono, rispettivamente,

$$\begin{gathered}
(0, -x_3^{(1)}, x_2^{(1)}, 0, -x_3^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, 0, -x_3^{(N)}, x_2^{(N)}) \\
(-x_3^{(1)}, 0, x_1^{(1)}, -x_1^{(2)}, 0, x_3^{(2)}, \ldots, -x_3^{(N)}, 0, x_1^{(N)}) \\
(-x_2^{(1)}, x_1^{(1)}, 0, -x_2^{(2)}, x_1^{(2)}, 0, \ldots, -x_2^{(N)}, x_1^{(N)}, 0),
\end{gathered}$$

[*Suggerimento.* Si consideri prima il caso $N = 1$ e si ponga $q = x = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})$. Si consideri per esempio una rotazione $S^{(1)}(\alpha)$ di una angolo α intorno all'asse $\boldsymbol{e}_1$. Allora $Q(q,\alpha) = S^{(1)}(\alpha)q$, dove

$$S^{(1)}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

così che si ha

$$\frac{\mathrm{d}Q(q,\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\mathrm{d}S^{(1)}(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} q = \frac{\mathrm{d}S^{(1)}(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} (S^{(1)}(\alpha))^{-1} Q(q,\alpha) =: A^{(1)}(\alpha) Q(q,\alpha),$$

e quindi il campo vettoriale ξ_1 associato alla rotazione è $A^{(1)}x$, con

$$A^{(1)}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & -\cos\alpha \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente si ragiona per le rotazioni rigide intorno agli assi $\boldsymbol{e}_2$ ed $\boldsymbol{e}_3$, che sono delle forma $Q(q,\alpha) = S^{(2)}(\alpha)q$ e $Q(q,\alpha) = S^{(3)}(\alpha)q$, rispettivamente, con

$$S^{(2)}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad S^{(3)}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e per le quali si trova che i campi vettoriali hanno la forma $A^{(2)}x$ e $A^{(3)}x$, rispettivamente, con

$$A^{(2)}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^{(3)}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La discussione si estende facilmente al caso $N > 1$.]

Esercizio 7 Si discuta l'esempio 62.13. [*Suggerimento.* Si consideri prima il caso di un solo punto materiale di massa m in $\mathbb{R}^3$ e si consideri la trasformazione $q \mapsto Q(q,\alpha)$ definita da $Q(q,\alpha) = S^{(i)}(\alpha)q$, dove $S^{(i)}(\alpha)$ descrive una rotazione di un angolo α intorno all'asse $\boldsymbol{e}_i$. Supponiamo per concretezza che sia $i = 3$ (gli altri casi si trattano in modo analogo). Il campo vettoriale associato ξ ha componenti $\{f_k(q)\}_{k=1}^3$, con $f_1(q) = -q_2$, $f_2(q) = q_1$ e $f_3(q) = 0$ (cfr. l'esercizio 6), e quindi il momento $\pi_\xi^{\mathcal{L}}$ associato a ξ è dato da

$$\pi_\xi^{\mathcal{L}} = f_1(q)\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_1} + f_2(q)\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_2} = mq_1\dot{q}_2 - mq_2\dot{q}_1 = [q, m\dot{q}]_3,$$

i.e. la terza componente del momento angolare. Si generalizza facilmente al caso di più punti materiali.]

Esercizio 8 Si dimostri che

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}\alpha}\big(Q(q,\alpha),\dot{Q}(q,\alpha),t\big)\Big|_{\alpha=0}=0 \quad \forall q \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}\alpha}\big(Q(q,\alpha),\dot{Q}(q,\alpha),t\big)=0 \quad \forall q,\,\forall\alpha.$$

[*Suggerimento.* Si ha, per $\bar{\alpha}$ arbitrario,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}\alpha}\big(Q(q,\alpha),\dot{Q}(q,\alpha),t\big)\Big|_{\alpha=\bar{\alpha}} &= \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}\alpha}\big(Q(q,\bar{\alpha}+\alpha-\bar{\alpha}),\dot{Q}(q,\bar{\alpha}+\alpha-\bar{\alpha}),t\big)\Big|_{\alpha=\bar{\alpha}}\\ &= \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}\alpha}\big(Q(Q(q,\bar{\alpha}),\alpha-\bar{\alpha}),\dot{Q}(Q(q,\bar{\alpha}),\alpha-\bar{\alpha}),t\big)\Big|_{\alpha=\bar{\alpha}}\\ &= \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}\alpha'}\big(Q(Q(q,\bar{\alpha}),\alpha'),\dot{Q}(Q(q,\bar{\alpha}),\alpha'),t\big)\Big|_{\alpha'=0}\\ &= \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}\alpha'}\big(Q(q',\alpha'),\dot{Q}(q',\alpha'),t\big)\Big|_{\alpha'=0}\end{aligned}$$

dove $q'=Q(q,\bar{\alpha})$. Se q è arbitrario anche q' è arbitrario,]

Esercizio 9 Data una lagrangiana $\mathcal{L}(q,\dot{q})$, si definisca una lagrangiana $\mathcal{L}'(q,\dot{q},t,\dot{t})$ sullo spazio delle configurazioni esteso tale che $\mathcal{L}(q,\dot{q})$ sia la lagrangiana ridotta ottenuta da $\mathcal{L}'(q,\dot{q},t,\dot{t})$ attraverso il metodo di Routh. [*Suggerimento.* Nello spazio delle configurazioni esteso le equazioni del moto sono

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}, \qquad \dot{t}=1.$$

Se definiamo $\mathcal{L}'(q,\dot{q},t,\dot{t})=\mathcal{L}(q,\dot{q})+\dot{t}$, si ha $p:=[\partial\mathcal{L}/\partial\dot{t}]=1$, quindi, formalmente, la lagrangiana ridotta è $\mathcal{L}_R(q,\dot{q})=\mathcal{L}(q,\dot{q})+\dot{t}-\dot{t}\cdot 1=\mathcal{L}(q,\dot{q})$.]

Esercizio 10 Si dimostri la proprietà (1) del lemma 63.3. [*Soluzione.* La derivazione associata a $-[\xi_1,\xi_2]$ è $-\partial_\xi$, se ∂_ξ è la derivazione associata a $[\xi_1,\xi_2]$. Da qui segue l'asserto.]

Esercizio 11 Si dimostri la proprietà (2) del lemma 63.3. [*Soluzione.* Segue dalla linearità della derivazione.]

Esercizio 12 Si dimostri la proprietà (3) del lemma 63.3 (identità di Jacobi). [*Soluzione.* Si considerano le derivazioni associate ai tre campi vettoriali ξ_1,ξ_2,ξ_3 e si verifica, utilizzando la definizione 63.2 che la derivazione associata al campo vettoriale $\zeta:=[\xi_1,[\xi_2,\xi_3]]+[\xi_2,[\xi_3,\xi_1]]+[\xi_3,[\xi_1,\xi_2]]$ è data da

$$\begin{aligned}\partial_\zeta = (\partial_1\partial_2\partial_3-\partial_1\partial_3\partial_2-\partial_2\partial_3\partial_1+\partial_3\partial_2\partial_1)&\\ +(\partial_2\partial_3\partial_1-\partial_2\partial_1\partial_3-\partial_3\partial_1\partial_2+\partial_1\partial_3\partial_2)&\\ +(\partial_3\partial_1\partial_2-\partial_3\partial_2\partial_1-\partial_1\partial_2\partial_3+\partial_2\partial_1\partial_3)&,\end{aligned}$$

dove ∂_k è una notazione abbreviata per ∂_{ξ_k}. Quindi $\partial_\zeta=0$, da cui segue che $\zeta=0$.]

Esercizio 13 Si derivi la (63.12) e si estenda la dimostrazione del teorema 63.7 al caso in cui i diffeomorfismi siano solo di classe C^1. [*Suggerimento.* Se $\alpha\mapsto Q(q,\alpha)$ è di classe C^2, lo sviluppo di Taylor di $Q(q,\alpha)$ dà

$$Q(q,\alpha)=q+f(q)\,\alpha+\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial\alpha}(q)\,\alpha^2+o(\alpha^2),$$

dove $[\partial f/\partial\alpha](q) = [\partial f(Q(q,\alpha))/\mathrm{d}\alpha]|_{\alpha=0}$ e si è tenuto conto che $f(q) = [\mathrm{d}Q(q,\alpha)/\mathrm{d}\alpha]|_{\alpha=0}$. Da qui si ottiene la (63.12). Se $Q(q,\alpha)$ è solo di classe C^1, possiamo solo scrivere $Q(q,\alpha) = q + f(q)\,\alpha + g(q,\alpha)$, con $g(q,\alpha) = o(\alpha)$, così che

$$\begin{aligned} Q_i(Q_j(q,\alpha_j),\alpha_i) &= Q_i(q + f_j(q)\alpha_j + g_j(q,\alpha_j),\alpha_i) \\ &= q + f_j(q)\,\alpha_j + g_j(q,\alpha_j) + f_i(q + f_j(q)\,\alpha_j + g_j(q,\alpha_j))\,\alpha_i + g_i(q + f_j(q)\,\alpha_j + g_j(q,\alpha_j),\alpha_i) \\ &= q + f_j(q)\,\alpha_j + g_j(q,\alpha_j) + f_i(q)\,\alpha_i + \left\langle \frac{\partial f_i(q)}{\partial q}, f_j(q) \right\rangle \alpha_i\alpha_j + g_i(q,\alpha_i)) + o(\alpha_i\alpha_j), \end{aligned}$$

e analogamente per gli indici i e j scambiati. Quando si calcola $Q_i(Q_j(q,\alpha_j),\alpha_i) - Q_j(Q_j(q,\alpha_i,\alpha_j)$, in conclusione, i termini $g_i(q,\alpha_i)$ e $g_j(q,\alpha_j)$ si cancellano e si ottiene sempre la (63.14), con $N_i(\alpha_i,\alpha_j)$ e $N_j(\alpha_i,\alpha_j)$ che soddisfano la (63.13).]

Esercizio 14 Si dimostri che se $\xi_1,\ldots,\xi_M$ sono M vettori linearmente indipendenti allora è possibile scegliere un sistema di coordinate in cui le loro componenti siano rappresentate dalle (63.19). [*Suggerimento.* Sia E_i lo spazio generato da ξ_i. Allora $E = \mathbb{R}^n = E_1 \oplus \ldots \oplus E_M \oplus E'$, dove $E' = \{v \in E : \langle v,\xi_i\rangle = 0\ \forall i = 1,\ldots,M\}$. Ogni $v \in E$ si può scrivere come $v = c_1\xi_1 + \ldots + c_M\xi_M + \xi'$, con $\xi' \in E'$. Sia $\{v_{M+1},\ldots,v_n\}$ una base per E': allora $\{\xi_1,\ldots,\xi_M, v_{M+1},\ldots,v_n\}$ è una base per E. In tale base i campi ξ_i sono rappresentati dalle funzioni $f_{ik}(x) = \delta_{ik}$.]

Esercizio 15 Si dimostri la (63.26). [*Soluzione.* Derivando la (63.25) rispetto a q_j, per $j = 1,\ldots,n$, e calcolando la derivata a $q = q_0$, dove $\tilde\alpha_1(q_0) = \ldots = \tilde\alpha_M(q_0) = 0$, si trova

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial q_j}(q_0) = \frac{\partial q_i}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^M f_{ki}(q_0)\frac{\partial\tilde\alpha_k}{\partial q_j}(q_0) = \delta_{ij},$$

dal momento che $i \geq M+1$ e $f_{ki}(q_0) = \delta_{ik} =$ per $k \leq M$ (cfr. la (63.19)).]

Esercizio 16 Si dimostri la (63.27). [*Soluzione.* La (63.23) è identicamente soddisfatta per q in un intorno di q_0. Quindi, derivando rispetto a q e ponendo $\tilde\alpha(q) = (\tilde\alpha_1(q),\ldots,\tilde\alpha_M(q))$, si trova

$$0 = \frac{\partial}{\partial q_j}F_i(q,\tilde\alpha(q)) = \left.\frac{\partial F_i}{\partial q_j}(q,\alpha)\right|_{\alpha=\tilde\alpha(q)} + \sum_{k=1}^M \left.\frac{\partial F_i}{\partial\alpha_k}(q,\alpha)\right|_{\alpha=\tilde\alpha(q)} \frac{\partial\tilde\alpha_k}{\partial q_j}(q),$$

che, calcolata in $q = q_0$, dà

$$0 = \left.\frac{\partial}{\partial q_j}F_i(q,\tilde\alpha(q))\right|_{q=q_0} = \left.\frac{\partial F_i}{\partial q_j}(q_0,\alpha)\right|_{\alpha=\tilde\alpha(q_0)} + \sum_{k=1}^M \left.\frac{\partial F_i}{\partial\alpha_k}(q_0,\alpha)\right|_{\alpha=\tilde\alpha(q_0)} \frac{\partial\tilde\alpha_k}{\partial q_j}(q_0),$$

dove $\tilde\alpha(q_0) = 0$. Ricordando la definizione (63.20) di $F_i(q,\alpha_1,\ldots,\alpha_M)$ e usando $\tilde\alpha(q_0) = 0$, si ottiene

$$\left.\frac{\partial F_i}{\partial q_j}(q_0,\alpha)\right|_{\alpha=\tilde\alpha(q_0)} = \frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij},$$

e, allo stesso modo, usando la (63.19), si trova

$$\left.\frac{\partial F_i}{\partial\alpha_k}(q_0,\alpha)\right|_{\alpha=\tilde\alpha(q_0)} = f_{ik}(q_0) = f_i(q_0)\delta_{ik}.$$

Ne segue la (63.27).]

Esercizio 17 Si dimostrino le (63.29). [*Suggerimento.* Per definizione $\tilde{\alpha}_1(q), \ldots, \tilde{\alpha}_M(q)$ sono i valori di $\alpha_1, \ldots, \alpha_M$ tali che il punto

$$\mathcal{Q}(q, \alpha_1, \ldots, \alpha_M) := Q_M(Q_{M-1}(\ldots Q_1(q, \alpha_1), \ldots, \alpha_{M_1}), \alpha_M)$$

ha le prime M componenti nulle, i.e. tali che, definendo $\tilde{\mathcal{Q}}(q) := \mathcal{Q}(q, \tilde{\alpha}_1(q), \ldots, \tilde{\alpha}_M(q))$, si abbia $\tilde{\mathcal{Q}}_1(q) = \ldots = \tilde{\mathcal{Q}}_M(q) = 0$. Quindi se cambiamo q in $q' = \mathcal{Q}(q, \ldots, 0, \alpha_j, 0, \ldots, 0)$ si ha per costruzione $\tilde{\alpha}_j(q') = \tilde{\alpha}_j(q) - \alpha_j$ e $\tilde{\alpha}_i(q') = \tilde{\alpha}_i(q)$ per $i \neq j$. Da qui seguono le equazioni $\mathrm{d}y_i/\mathrm{d}\alpha_i = -1$ e $\mathrm{d}y_i/\mathrm{d}\alpha_j = 0$ per $1 \leq i \neq j \leq M$. Se invece $i = M+1, \ldots, n$ le $y_i(q)$ rappresentano le ultime $n - M$ coordinate del punto $\mathcal{Q}(q, \alpha_1, \ldots, \alpha_M)$ quando le prime M si annullano; quindi $y_i(q) = \mathcal{Q}_i(q, \alpha_1, \ldots, \alpha_M)$ per $i = M+1, \ldots, n$. Si ha pertanto $\psi_i(q') = \mathcal{Q}_i(q, \ldots, 0, \alpha_j, 0, \ldots, 0) = (q, \ldots, 0, 0, 0, \ldots, 0)$, e quindi $\mathrm{d}y_i/\mathrm{d}\alpha_j = 0$ per $i \geq M+1$ e $j \leq M$.]

Esercizio 18 Si dimostri che dati due campi vettoriali ξ_1 e ξ_2 rappresentati dalle (63.38), allora il campo vettoriale $\xi_3 = [\xi_1, \xi_2]$ è rappresentato dalle funzioni

$$f_{3k}(q) = \sum_{h=1}^{n} A_{3kh} q_h,$$

con $A_3 = [A_2, A_1] = A_2 A_1 - A_1 A_2$. [*Suggerimento.* Basta applicare la formula (63.4), con $f_k = f_{1k}$ e $g_k = f_{2k}$, per determinare le funzioni $f_{3k}(q)$ che rappresentano il campo vettoriale ξ_3.]

Esercizio 19 Si dimostri che il campo vettoriale associato a una rotazione intorno a un asse cartesiano è rappresentato da funzioni della forma (63.38). [*Soluzione.* Segue dalla discussione dell'esercizio 6.]

Esercizio 20 Siano ξ_1 e ξ_2 due campi vettoriali in $\mathbb{R}^n$, tali che le funzioni $\{f_{1k}(q)\}_{k=1}^n$ e $\{f_{2k}(q)\}_{k=1}^n$ che li rappresentano nel sistema di coordinate q siano, rispettivamente, costanti e lineari; quindi esistono un vettore A_1 e una matrice A_2 tali che

$$f_{1k}(q) = A_{1k}, \qquad f_{2k}(q) = \sum_{h=1}^{n} A_{2kh} q_h,$$

dove A_{1k} sono le componenti di A_1 e A_{2kh} sono gli elementi di matrice di A_2. Si dimostri che il campo vettoriale $[\xi_1, \xi_2]$ è costante e se ne trovi l'espressione esplicita. [*Soluzione.* Si ha

$$f_k(q) = (A_2 A_1)_k = \sum_{h=1}^{n} A_{2kh} A_{1h},$$

se $f_k(q)$ sono le funzioni che rappresentano il campo vettoriale $[\xi_1, \xi_2]$.]

Esercizio 21 Si dimostri che se ξ_i e ξ_j sono i campi vettoriali associati alle rotazioni intorno agli assi cartesiani $\boldsymbol{e}_i$ ed $\boldsymbol{e}_j$, con $1 \leq i \neq j \leq 3$, allora il campo vettoriale $\xi_k = [\xi_i, \xi_j]$ è associato a rotazioni intorno all'asse $\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j$. [*Suggerimento.* Si usino i risultati degli esercizi 6 e 18.]

Esercizio 22 Dai due campi vettoriali ξ_1 e ξ_2 tali che $\xi_3 := [\xi_1, \xi_2] \neq 0$, è possibile che risulti $[\xi_1, \xi_3] = 0$? [*Suggerimento.* Si considerino i campi vettoriali dell'esercizio 20.]

Esercizio 23 Dai due campi vettoriali ξ_1 e ξ_2 tali che $\xi_3 := [\xi_1, \xi_2] \neq 0$, è possibile che risulti simultaneamente $[\xi_1, \xi_3] = 0$ e $[\xi_2, \xi_3] = 0$? [*Suggerimento.* Si considerino i campi vettoriali dell'esercizio 20, scegliendo come matrice A_2 una matrice nilpotente di ordine 2.]