Quindi $\pm\varphi_0$ sono configurazioni di equilibrio stabili. In corrispondenza della soluzione $\varphi(t) = \varphi_0$ si ha $\theta(t) = \theta(0) + \omega t$, dove $\omega := l_z/m\ell^2 \sin^2\varphi_0 = \sqrt{g/\ell \cos\varphi_0}$: il pendolo ruota intorno all'asse verticale mantenendo un'inclinazione costante (cfr. la soluzione dell'esercizio 58 del capitolo 11). Per qualsiasi altro dato iniziale il pendolo ruota intorno alla verticale, mentre l'angolo d'inclinazione $\varphi$ compie delle oscillazioni intorno a uno dei due valori di equilibrio $\pm\varphi_0$. Se invece $a = 0$ (i.e. $\ell_z = 0$, che corrisponde a dati iniziali tali che $\dot\theta(0) = 0$), il pendolo si muove in un piano $\theta$ =cost. e le equazioni del moto si riducono a quelle del pendolo semplice: $\ell\ddot\varphi = -g\sin\varphi$.]

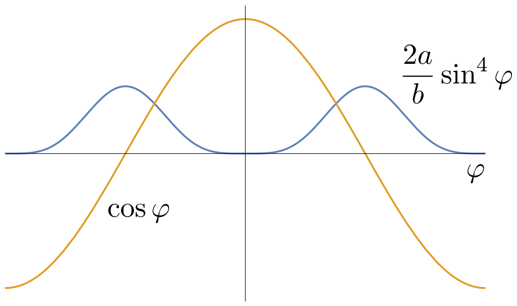


Figura 13.2: Grafico delle funzioni $(2a/b)\sin^4\varphi$ e $\cos\varphi$ nel caso $a = 1$ e $b = 4$.

**Esercizio 31** Si consideri la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \dot{\boldsymbol{x}}^{(1)}, \dot{\boldsymbol{x}}^{(2)}) = \frac{1}{2}m_1|\dot{\boldsymbol{x}}^{(1)}|^2 + \frac{1}{2}m_1|\dot{\boldsymbol{x}}^{(2)}|^2 - V(|\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(2)}|) - \lambda\,(m_1 g z_1 + m_2 g z_2)\,,$$

dove $\boldsymbol{x}^{(1)} = (x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{x}^{(2)} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\lambda \in \{0,1\}$, che descrive due punti materiali in $\mathbb{R}^3$ che interagiscono attraverso una forza che verifica le condizioni del §31.1 (problema dei due corpi) e, se $\lambda = 1$, sono inoltre sottoposti all'azione della forza peso. Si dimostri che è possibile trovare un sistema di coordinate tali che due di esse, se $\lambda = 1$, e tre di esse, se $\lambda = 0$, sono cicliche, e si interpreti il risultato alla luce del teorema di Noether (teorema 63.15). [*Suggerimento.* Il sistema è invariante per traslazioni lungo gli assi $x$ e $y$ e, se $\lambda = 0$, anche per traslazioni lungo l'asse $z$. Poiché i gruppi delle traslazioni commutano tra loro, per il teorema di Noether è possibile trovare un sistema di coordinate in cui due (se $\lambda = 1$) o tre (se $\lambda = 0$) sono cicliche. Il nuovo sistema di coordinate si ottiene definendo

$$\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) := \frac{m_1\boldsymbol{x}^{(1)} + m_2\boldsymbol{x}^{(2)}}{m_1 + m_2}, \qquad \boldsymbol{x} = (x, y, z) := \boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(2)},$$

che rappresentano, rispettivamente, le coordinate del centro di massa e le coordinate relative. In termini delle nuove coordinate la lagrangiana diventa

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}_0, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}M|\dot{\boldsymbol{x}}_0|^2 + \frac{1}{2}\mu|\dot{\boldsymbol{x}}|^2 - V(|\boldsymbol{x}|) - \lambda\left(Mgz_0 + 2\frac{m_1m_2}{M}gz\right),$$

dove $M := m_1 + m_2$ è la massa totale del sistema e $\mu = m_1m_2/M$ è la massa ridotta (cfr. il §31.1). Se $\lambda = 0$ abbiamo tre variabili cicliche (le coordinate del centro di massa $(x_0, y_0, z_0)$), mentre se $\lambda = 1$ sono coordinate cicliche solo le componenti $x_0$ e $y_0$ del centro di massa.]

**Esercizio 32** In riferimento all'esercizio 31, si mostri che il sistema è invariante per qualsiasi rotazione se $\lambda = 0$, mentre se $\lambda = 1$ è invariante solo per rotazioni intorno all'asse $z$. Si discuta in entrambi i casi se sia possibile trovare un sistema di coordinate in cui ci siano altre variabili cicliche e, in caso affermativo, si specifichi quante se ne possono trovare. [*Suggerimento.* Consideriamo il caso $\lambda = 1$. Con le notazioni dell'esercizio 31, usiamo coordinate cilindriche per le coordinate relative $\boldsymbol{x}$: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = z$. In termini di tali coordinate la lagrangiana diventa:

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}(\boldsymbol{x}_0,\rho,\theta,z,\dot{\boldsymbol{x}}_0,\dot\rho,\dot\theta,\dot z) = \frac{1}{2}M|\dot{\boldsymbol{x}}_0|^2 + \frac{1}{2}\mu\big(\dot\rho^2+\rho^2\dot\theta^2+\dot z^2\big) - V(\sqrt{\rho^2+z^2}) - \lambda\left(Mgz_0 + 2\frac{m_1m_2}{M}gz\right),$$

da cui si vede che la coordinata $\theta$ è ciclica. Sono gruppi di simmetrie i gruppi delle traslazioni lungo gli assi $x$ e $y$, i.e. $\boldsymbol{x}^{(i)} \to \boldsymbol{x}^{(i)} + \alpha\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{x}^{(i)} \to \boldsymbol{x}^{(i)} + \alpha\boldsymbol{e}_2$, per $i = 1, 2$, e il gruppo delle rotazioni intorno alla verticale condotta per il centro di massa, i.e. il gruppo definito dalle trasformazioni:

$$\boldsymbol{x}^{(1)} \mapsto \boldsymbol{x}_0 + S^{(3)}(\alpha)(\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}_0), \qquad \boldsymbol{x}^{(2)} \mapsto \boldsymbol{x}_0 + S^{(3)}(\alpha)(\boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{x}_0).$$

Il campo vettoriale corrispondente, che indichiamo con $L_z^{\rm rel}$, ha componenti

$$(-(y_1-y_0), x_1-x_0, 0, -(y_2-y_0), x_2-x_0, 0)\,.$$

Denotiamo con $P_x$ e $P_y$ i campi vettoriali associati alle traslazioni lungo l'asse $x$ e l'asse $y$, rispettivamente, così che (cfr. l'esercizio 4) si ha $P_x = (1,0,0,1,0,0)$ e $P_y = (0,1,0,0,1,0)$. Si verifica facilmente che $[P_x, P_y] = [P_x, L_z^{\rm rel}] = [P_x, L_z^{\rm rel}] = 0$. Si noti che, se consideriamo il gruppo delle rotazioni intorno all'asse $z$ (che è anch'esso un gruppo di simmetria), il corrispondente campo vettoriale $L_z$ non ha prodotto di Lie nullo con $P_x$ e $P_y$ (cfr. l'esercizio 24): questo mostra che il terzo campo vettoriale da considerare, se vogliamo trovare tre variabili cicliche, è $L_z^{\rm rel}$ – o anche il campo vettoriale associato alle rotazioni intorno al punto di coordinate $\boldsymbol{x}^{(1)}$ – ma non $L_z$ Se $\lambda = 0$ il sistema è invariante per qualsiasi rotazione intorno al centro di massa; d'altre parte i gruppi delle rotazioni non commutano tra loro, quindi possiamo trovare al più quattro variabili cicliche: tre relative alle traslazioni lungo i tre assi coordinati e una relativa alla rotazione intorno a un asse passante per il centro di massa; per esempio, usando coordinate sferiche, si può scrivere la lagrangiana (per $\lambda = 0$)

$$\mathcal{L} := \mathcal{L}(\boldsymbol{x}_0,\rho,\varphi,\theta,\dot{\boldsymbol{x}}_0,\dot\rho,\dot\varphi,\dot\theta) = \frac{1}{2}M|\dot{\boldsymbol{x}}_0|^2 + \frac{1}{2}\mu\left(\dot\rho^2+\rho^2\dot\varphi^2+\rho^2\sin^2\varphi\,\dot\theta^2\right) - V(\rho),$$

da cui si vede che $\boldsymbol{x}_0$ e $\varphi$ sono cicliche. D'altra parte la conservazione del momento angolare consente di ricondurre l'analisi del sistema a quella di un sistema unidimensionale (cfr. il capitolo 7); tale sistema non si ottiene però dal sistema di partenza mediante l'applicazione del metodo di Routh.]