FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2021/2022

Primo appello (13-06-2022)

<u>Esercizio 1.</u> [6+4] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \alpha \cos x + \sin^2 x + \left(\cos x + \sin^2 x\right)^2, \quad x \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

1. Si consideri esplicitamente il caso $\alpha = 1$.
   1.1. Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
   1.2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato.
   1.3. Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio.
   1.4. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.
2. [Si risponda alle stesse domande per $\alpha = 2$.]

<u>Esercizio 2.</u> [6+2] Un carrello scorre lungo la guida elicoidale descritta, in un sistema di riferimento fisso $\kappa = Oxyz$, dalle equazioni parametriche

$$x(\alpha) = \cos\alpha, \quad y(\alpha) = \sin\alpha, \quad z(\alpha) = h - \alpha \qquad \alpha \in [0, h],$$

in modo tale che in ogni istante $t \in [0, h]$ si abbia $\alpha = t$. Si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ la cui origine sia solidale con il carrello e i cui assi siano orientati in modo che l'asse ζ sia parallelo all'asse z e l'asse η sia rivolro, nella direzione radiale $(x(t), y(t))$, verso l'asse z. All'istante $t = 0$ un sasso P di massa m viene lanciato dal carrello verso l'alto con velocità iniziale v.

1. Si scriva la trasformazione rigida $D : K \to \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B.
2. Si determini il moto $\boldsymbol{q}(t)$ di P nel sistema di riferimento fisso.
3. Si determini il moto $\boldsymbol{Q}(t)$ di P nel sistema di riferimento mobile
4. Si determino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento del sasso.
5. [Quando il carrello raggiunge il fondo della guida si arresta: si calcoli la posizione di P in tale istante.]
6. [Si discuta per quali valori di h il sasso cade esattamente nel punto in cui si arresta il carrello, e, in corrispondenza di tali valori, si discuta se sia possibile fissare v in modo tale che il sasso e il carrello arrivino contemporaneamente in fondo alla guida.]

<u>Esercizio 3.</u> [6+2] Un sistema meccanico è costituito da due punti materiali P_1 e P_2, entrambi di massa m, vincolati a muoversi lungo un profilo circolare di raggio $r = 1$, disposto in un piano verticale. I due punti sotto sottoposti alla forza peso (sia g l'accelerazione di gravità) e sono collegati tra loro da una molla di costante elastica k e di lunghezza a riposo trascurabile.

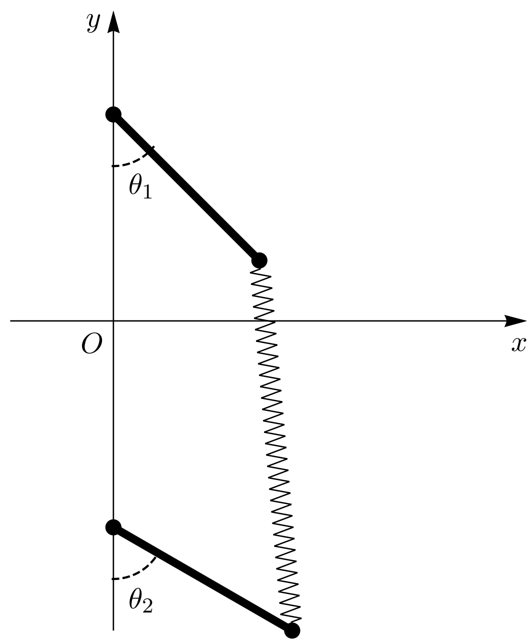
1. Si scriva la lagrangiana del sistema. (Come coordinate lagrangiane si possono utilizzare gli angoli θ_1 e θ_2 che le i due punti formano con l'asse x).
2. Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
4. [Si determini la forza vincolare che agisce sul punto P_1 in corrispondenza di una configurazione di equilibrio stabile.]

ESERCIZIO 4. [6+4] Un sistema meccanico è costituito da 2 aste omogenee di massa M e di lunghezza ℓ, incernierate in due punti fissi disposti lungo un'asse verticale e, a distanza 2ℓ l'uno dall'altro. Le due aste sono vincolate a muoversi in un piano verticale contenente l'asse e, sotto l'azione della forza peso (sia g l'accelerazione di gravità), e una molla di lunghezza a riposo trascurabile e di costante elastica k ne collega tra loro gli estremi liberi.

1. Si scriva la lagrangiana del sistema, utilizzando come coordinate lagrangiane gli angoli θ_1 e θ_2 che le due aste formano con il verso discendente dell'asse e (cfr. la figura).
2. Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si verifichi che

$$(\theta_1, \theta_2) = (0, 0), \quad (\theta_1, \theta_2) = (0, \pi),$$
$$(\theta_1, \theta_2) = (\pi, 0), \quad (\theta_1, \theta_2) = (\pi, \pi)$$

   sono quattro configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
4. [Si individuino le restanti configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.]



ESERCIZIO 5. [6+2] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q_1 = 2\log q_1 \sqrt{p_1 q_1 + 2\dfrac{q_1^2 p_2}{q_2}}, \\ Q_2 = 2(q_2^2 - q_1^2)\sqrt{\dfrac{p_2}{2q_2}}, \\ P_1 = \sqrt{p_1 q_1 + 2\dfrac{q_1^2 p_2}{q_2}}, \\ P_2 = \sqrt{\dfrac{p_2}{2q_2}}. \end{cases}$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione.
2. Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F(q_1, q_2, P_1, P_2)$.
3. Si verifichi che la funzione generatrice $F = F(q_1, q_2, P_1, P_2)$ trovata al punto precedente soddisfa la condizione che la matrice 2×2 di elementi $\partial^2 F/\partial q_i \partial P_j$ è non singolare nel dominio $\mathcal{D}$.
4. Data l'hamiltoniana

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}\left(p_1 q_1 + 2\frac{q_1^2 p_2}{q_2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{p_2}{2q_2}\right)^2,$$

   si determini l'hamiltoniana nelle variabili (Q_1, Q_2, P_1, P_2).
5. [Si determini la soluzione delle equazioni del moto del sistema con hamiltoniana $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$ in corrispondenza dei dati iniziali $q_1(0) = p_1(0) = q_2(0) = p_2(0) = 1$.]