FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2021/2022

Secondo appello (04-07-2022)

<u>Esercizio 1.</u> [6+4] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{\alpha}{4}\left(x^4+1\right)^2 - \left(x^4+1\right), \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Si consideri esplicitamente il caso $\alpha = 1$.
   1.1. Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
   1.2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato.
   1.3. Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio.
   1.4. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.
2. [Si risponda alle stesse domande al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.]

<u>Esercizio 2.</u> [6+2] Dato un sistema di riferimento fisso $\kappa = Oxyz$, si consideri il sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ la cui origine O' si muove nel piano xy lungo la circonferenza di raggio $R = 2$ e centro O con velocità angolare costante Ω, in modo tale che l'asse ζ resti parallelo all'asse z e l'asse ξ sia ortogonale alla circonferenza, rivolto verso l'esterno. Nel sistema di riferimento mobile un punto materiale P di massa m si muove nel piano $\xi\eta$ lungo la circonferenza di raggio $r = 1$ e centro O' con velocità angolare costante ω. All'istante iniziale $t = 0$, sia l'origine O' del sistema di riferimento K sia il punto P si trovano lungo l'asse x positivo.

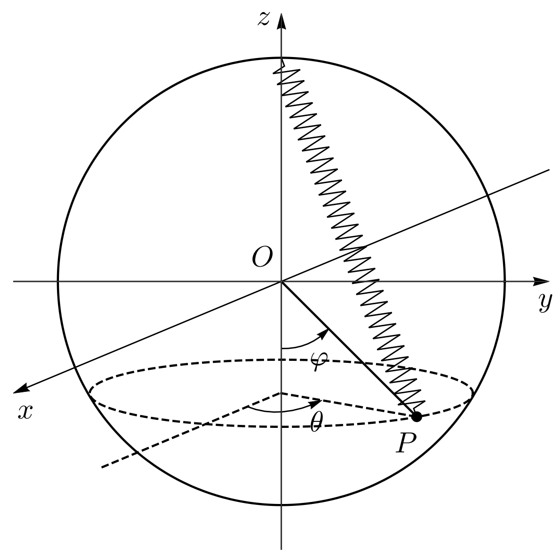
1. Si scriva la trasformazione rigida $D\colon K \to \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B.
2. Si determini il moto $\boldsymbol{Q}(t)$ di P nel sistema di riferimento mobile.
3. Si determini il moto $\boldsymbol{q}(t)$ di P nel sistema di riferimento fisso.
4. Si determinino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento del punto P.
5. [Si determinino i valori che deve assumere il rapporto ω/Ω perché il punto P torni esattamente al punto di partenza nel sistema fisso dopo che il sistema di riferimento mobile K ha compiuto 3 giri completi rispetto al sistema di riferimento fisso κ.]

<u>Esercizio 3.</u> [6+3] Un sistema meccanico è costituito da due punti materiali P_1 e P_2, entrambi di massa m, vincolati a muoversi in un piano verticale – che identifichiamo con il piano xy – il primo lungo l'asse x e il secondo lungo l'asse y, e da un'asta omogenea di lunghezza ℓ e di massa M che collega tra loro i due punti. Inoltre il punto P_1 è collegato all'origine da una molla di lunghezza a riposo trascurabile e costante elastica k.

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema (come coordinata lagrangiana si usi l'angolo θ che l'asta forma con l'asse x) e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
3. [Si determini la forza vincolare che agisce sul punto P_1 in corrispondenza di una configurazione di equilibrio stabile.]

Esercizio 4. [6+2] Un sistema meccanico è costituito da un punto materiale P di massa m vincolato a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio R. Il punto P è sottoposto all'azione della forza peso (sia g l'accelerazione di gravità) ed è collegato al punto più in alto della sfera da una molla di lunghezza a riposo trascurabile e costante elastica k. Si fissi un sistema di coordinate in cui l'origine O coincida con il centro della sfera e la forza peso sia diretta lungo il semiasse z negativo.

1. Si scriva la lagrangiana del sistema, utilizzando come coordinate lagrangiane l'angolo φ che il segmento OP forma con il semiasse z negativo e l'angolo θ che la proiezione del segmento OP sul piano xy forma con l'asse x (cfr. la figura).
2. Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si verifichi in particolare che, in un opportuno sistema di riferimento che ruota intorno all'asse verticale, il sistema o si comporta come un pendolo semplice o si muove di moto circolare uniforme.
4. Si trovino le configurazioni di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità.
5. [Si trovino le configurazioni di equilibrio relativo nel sistema rotante e se ne discuta la stabilità.]



Esercizio 5. [6+2+2] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = \left(\dfrac{2p}{q} - 6q^2 \right) \sqrt{\dfrac{p}{2q} - 2q^2}, \\ \\ P = \sqrt{\dfrac{p}{2q} - 2q^2}, \end{cases}$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione di coordinate.
2. Si dimostri che la trasformazione di coordinate è canonica trovandone una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$.
3. Si verifichi che la funzione generatrice $F = F(q, P)$ trovata al punto precedente soddisfa la condizione che $\partial^2 F/\partial q \partial P \neq 0$ nel dominio $\mathcal{D}$.
4. Data l'hamiltoniana
$$H(q, p) = \frac{p^2}{8q^2} - qp + 2q^4,$$
si determini l'hamiltoniana nelle variabili (Q, P).
5. Si consideri il sistema hamiltoniano descritto dall'hamiltoniana $H(q, p)$ e si determini, nel nuovo sistema di coordinate (Q, P), la soluzione delle equazioni del moto che corrisponde ai dati iniziali $q(0) = 1/2$ e $p(0) = 1$.
6. [Si determini la soluzione del punto precedente nel sistema di coordinate originale (q, p).]
7. [Si verifichi esplicitamente che la trasformazione di coordinate conserva le parentesi di Poisson fondamentali.]