FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2021/2022

Terzo appello (05-09-2022)

<u>Esercizio 1.</u> [6+4] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{\alpha}{3}\left(x^3+1\right)^3 - \left(x^3+1\right), \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Si consideri esplicitamente il caso $\alpha = 1$.
   1.1. Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
   1.2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato.
   1.3. Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio.
   1.4. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.
2. [Si risponda alle stesse domande al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.]

<u>Esercizio 2.</u> [6+2] Un carrello si muove nel piano (x, z), lungo una guida parabolica di equazione $z = x^2$, in un sistema di riferimento fisso $\kappa = Oxyz$, con legge oraria $x(t) = -2 + v_0 t$, con $v_0 > 0$. Si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ tale che

- l'origine O' coincide con il carrello;
- l'asse ξ è diretto tangenzialmente alla guida,
- l'asse η è parallelo all'asse y;
- i due sistemi di riferimento coincidono quando O' si trova in O.

Sia $D\colon K \to \kappa$ la trasformazione rigida che fa passare dal sistema K al sistema κ.

1. Si scriva D come composizione di una traslazione C con una rotazione B.
2. All'istante iniziale, un passeggero lancia dal carrello un sasso di massa m, parallellamente all'asse x, con velocità v: si determini il moto $\boldsymbol{q}(t)$ di P nel sistema di riferimento fisso κ.
3. Si determini il moto $\boldsymbol{Q}(t)$ di P nel sistema di riferimento mobile.
4. Si determinino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento del punto P.
5. [Si determine che condizioni devono soddisfare v_0 e v perché il carrello intercetti il sasso mentre cade e il passeggero possa riprenderlo.]

<u>Esercizio 3.</u> [6+2] Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi nel piano verticale xy, lungo il profilo descritto dall'equazione $y = 3x - x^3$, sotto l'azione della forza di gravità (si indichi con g l'accelerazione di gravità). Inoltre il piano xy ruota intorno all'asse verticale y con velocità angolare costante ω.

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema (come coordinata lagrangiana si usi l'asciassa x del punto P) e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio relativo e se ne discuta la stabilità.
3. [Si determini la forza vincolare che agisce su P in corrispondenza di una configurazione di equilibrio relativo.]

<u>ESERCIZIO 4.</u> [6+2] Un sistema meccanico è costituito da un punto materiale P di massa m vincolato a muoversi nel piano xy, all'interno di un quadrato di lato $\ell = 2$, soggetto a una forza di energia potenziale

$$V_0(x, y) = \frac{1}{1 - x^2} + \frac{1}{1 - y^2},$$

che tende ad allontanarlo dal bordo del quadrato.

1. Si supponga inizialmente che non agiscano altre forze sul punto P.
   1.1 Si scriva la lagrangiana del sistema.
   1.2 Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
   1.3 Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
2. Si consideri ora il caso in cui il quadrato ruoti con velocità angolare costante ω, intorno a un asse ad esso perpendicolare e passante per il suo centro O.
   2.1 Si determini l'energia potenziale centrifuga a cui è sottoposto il punto P nel sistema rotante solidale con il quadrato.
   2.2 Si scriva la lagrangiana del sistema nel sistema di riferimento rotante.
   2.3 Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
   2.4 Si determinino le configurazioni di equilibrio relativo e se ne discuta la stabilità, nel caso in cui l'analisi al secondo ordine sia conclusiva.
   2.5 [Si discuta la stabilità delle configurazioni di equilibrio relativo del caso 2 nel caso in cui l'analisi al secondo ordine non sia sufficiente.]

<u>ESERCIZIO 5.</u> [6+2+2] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = 2\sqrt[4]{\dfrac{p}{2q} + 1}\left(1 + 2q^2\sqrt{\dfrac{p}{2q} + 1}\right), \\ P = \sqrt[4]{\dfrac{p}{2q} + 1}, \end{cases}$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione di coordinate.
2. Si dimostri che la trasformazione di coordinate è canonica trovandone una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$.
3. Si verifichi che la funzione generatrice $F = F(q, P)$ trovata al punto precedente soddisfa la condizione che $\partial^2 F/\partial q \partial P \neq 0$ nel dominio $\mathcal{D}$.
4. Data l'hamiltoniana
$$H(q, p) = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{2q} + 1\right)^2,$$
si determini l'hamiltoniana nelle variabili (Q, P).
5. Si consideri il sistema hamiltoniano descritto dall'hamiltoniana $H(q, p)$ e si determini, nel nuovo sistema di coordinate (Q, P), la soluzione delle equazioni del moto che corrisponde ai dati iniziali $q(0) = 1$ e $p(0) = 0$.
6. [Si determini la soluzione del punto precedente nel sistema di coordinate originale (q, p).]
7. [Si verifichi esplicitamente che la trasformazione di coordinate conserva le parentesi di Poisson fondamentali.]