FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2021/2022

Quarto appello (17-01-2023)

<u>Esercizio 1.</u> [6+3] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = -\log\left((x+3)(x-1)(x-2)\right).$$

1. Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato.
3. Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio.
4. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.
5. [Si studi il sistema con energia potenziale $V(x) = -\log|(x+3)(x-1)(x-2)|$.]

<u>Esercizio 2.</u> [6+2] In un sistema di riferimento fisso $\kappa = Oxyz$, un carrello si muove in verso antiorario lungo un guida circolare di equazione $(x-1)^2 + (z-1)^2 = 1$, con velocità angolare costante ω. Sia $K = O'\xi\eta\zeta$ un sistema di riferimento mobile, tale che l'origine O' coincide con il carrello, l'asse ξ è tangente alla guida ed è diretto nel verso di avanzamento del carrello, e l'asse η è parallelo all'asse y. All'istante iniziale, il carrello si trova nella posizione $(x, z) = (0, 1)$ e un omino dal carrello lancia un sasso P con velocità v nella direzione dell'asse x: il sasso si muove sotto l'azione della forza di gravità (si indichi con g l'accelerazione di gravità).

1. Si scriva la trasformazione rigida $D\colon K \to \kappa$ che fa passare dal sistema K al sistema κ. come composizione di una traslazione C con una rotazione B.
2. Si determini il moto $\boldsymbol{q}(t)$ di P nel sistema di riferimento fisso κ.
3. Si determini il moto $\boldsymbol{Q}(t)$ di P nel sistema di riferimento mobile.
4. Si determinino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento di P.
5. [Si determini il valore che devono avere v e ω perché l'omino riprenda il sasso quando il carrello passa per la prima volta per il punto più basso della guida.]

<u>Esercizio 3.</u> [6+3] Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi lungo una guida descritta dall'equazione

$$x = \alpha\cos\alpha, \qquad y = \alpha\sin\alpha, \qquad z = \alpha, \qquad \alpha \in [-8\pi, 0].$$

soggetta alla forza di gravità (diretta nel verso dell'asse z discendente), mentre una molla di lunghezza trascurabile lo collega al punto più alto della guida. Siano g l'accelerazione di gravità e k la costante elastica della molla.

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema (come coordinata lagrangiana si usi la variabile α) e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
2. Si discuta l'esistenza e la stabilità delle configurazioni di equilibrio al variare di k.
3. [Si determini la forza vincolare che agisce su P in corrispondenza di eventuali configurazioni di equilibrio.]

Esercizio 4. [6+2] Un sistema meccanico è costituito da tre punti materiali P_0, P_1 e P_2, tutti di massa m, vincolati a muoversi nel piano verticale xy, soggetti alla forza di gravità, nel modo seguente: P_1 e P_2 scorrono rispettivamente lungo la retta $y = 2$ e lungo la retta $y = -2$, mentre P_0 si muove lungo la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ ed è collegato ai punti P_1 e P_2 tramite due molle di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile (si indichi con g l'accelerazione di gravità).

1. Si supponga inizialmente che non agiscano altre forze sui tre punti.
   1.1 Si scriva la lagrangiana del sistema.
   1.2 Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
   1.3 Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
2. Si consideri ora il caso in cui il piano xy ruoti intorno all'asse y con velocità angolare costante ω.
   2.1 Si determini l'energia potenziale centrifuga a cui sono sottoposti i tre punti nel piano rotante.
   2.2 Si scriva la lagrangiana del sistema nel sistema di riferimento rotante.
   2.3 Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
   2.4 Si determinino le configurazioni di equilibrio relativo e se ne discuta la stabilità, nel caso in cui l'analisi al secondo ordine sia conclusiva.
   2.5 [Si discuta la stabilità delle configurazioni di equilibrio relativo del caso 2 nel caso in cui l'analisi al secondo ordine non sia sufficiente.]

Esercizio 5. [6+2+2] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = -\dfrac{p}{2q}, \\ P = q^2 + \log\left(\dfrac{p}{2q}\right). \end{cases}$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione di coordinate.
2. Si dimostri che la trasformazione di coordinate è canonica trovandone una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$.
3. Si verifichi che la funzione generatrice $F = F(q, P)$ trovata al punto precedente soddisfa la condizione che $\partial^2 F/\partial q \partial P \neq 0$ nel dominio $\mathcal{D}$.
4. Data l'hamiltoniana
$$H(q,p) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{q^2}}{q} \right)^2 p^2,$$
si determini l'hamiltoniana nelle variabili (Q, P).
5. Si consideri il sistema hamiltoniano descritto dall'hamiltoniana $H(q, p)$ e si determini, nel nuovo sistema di coordinate (Q, P), la soluzione delle equazioni del moto che corrisponde ai dati iniziali $q(0) = 1$ e $p(0) = 1$.
6. Si determini la trasformazione inversa delle trasformazione canonica data.
7. [Si determini la soluzione del punto precedente nel sistema di coordinate originale (q, p).]
8. [Si verifichi esplicitamente che la trasformazione di coordinate conserva le parentesi di Poisson fondamentali.]