FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2021/2022

Quinto appello (01-02-2023)

<u>Esercizio 1.</u> [6+3] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{\sqrt{x\,(x^2-4)}}.$$

1. Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato.
3. Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio.
4. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.
5. [Si studi il sistema con energia potenziale $W(x) = V(|x|)$.]

<u>Esercizio 2.</u> [6+4] Dato un sistema di riferimento fisso $\kappa = Oxyz$, si consideri il sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ la cui origine O' si muove nel piano xy lungo il profilo descritto dall'equazione $y = f(x) := x^2(x^2-1)$ con legge oraria $x(t) = t$, in modo tale che l'asse ζ abbia la direzione e il verso dell'asse z e l'asse ξ sia tangente al profilo e diretto verso destra. Un omino P si muove nel sistema di riferimento K lungo l'asse ξ con legge oraria $\xi(t) = v_0 t$, con $v_0 > 0$. All'istante iniziale $t = 0$ l'omino lancia un sasso S con velocità $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, 0)$. L'unica forza che agisce sul sasso è la forza peso, diretta nel verso dell'asse y discendente (si indichi con g l'accelerazione di gravità).

1. Si scriva la trasformazione rigida $D\colon K \to \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B.
2. Si determini il moto $\boldsymbol{q}(t)$ del sasso S nel sistema di riferimento fisso e il moto corrispondente $\boldsymbol{Q}(t)$ nel sistema di riferimento mobile.
3. Si determinino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento del sasso S.
4. [Si determinino i valori che devono assumere v_0, v_1 e v_2 perché l'omino P possa riprendere il sasso S dopo averlo lanciato e si calcoli il tempo t_0 in cui questo accade.]

<u>Esercizio 3.</u> [5+3] Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi lungo una guida elicoidale, descritta dall'equazione

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = v\theta, \qquad \theta \geq 0,$$

con $r, v > 0$, soggetto alla forza di gravità, diretta nel verso dell'asse z discendente, mentre una forza repulsiva di intensità α/z^2, con $\alpha > 0$, lo spinge verso l'alto.

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema (come coordinata lagrangiana si usi la variabile α) e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
2. Si discuta l'esistenza e la stabilità delle configurazioni di equilibrio.
3. [Si determini la lagrangiana ridotta del sistema e si studi qualitativamente il moto del sistema unidimensionale ottenuto.]

Esercizio 4. [7+3] Un sistema meccanico è costituito da due punti materiali P_1 e P_2, entrambi di massa m, vincolati a muoversi nel piano verticale xy, lungo una retta r fissata alla posizione $x = 1$. I due punti sono soggetti alla forza di gravità, diretta nel verso dell'asse y discendente (sia g l'accelerazione di gravità). Inoltre tre molle di costante elastica k e di lunghezza a riposo trascurabile collegano, rispettivamente, il punto P_1 al punto $(0, 1)$, il punto P_2 al punto $(0, -1)$, e i punti P_1 e P_2 tra loro.

1. Si supponga inizialmente che non agiscano altre forze sui tre punti.
   - 1.1 Si scriva la lagrangiana del sistema.
   - 1.2 Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
   - 1.3 Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
2. Si consideri ora il caso in cui P_1 e P_2 possano muoversi nel piano xy senza essere vincolati a rimanere su r e il piano xy ruoti intorno all'asse y con velocità angolare costante ω.
   - 2.1 Si determini l'energia potenziale centrifuga dei due punti nel piano rotante.
   - 2.2 Si scriva la lagrangiana del sistema nel sistema di riferimento rotante.
   - 2.3 [Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.]
   - 2.4 [Si determinino le configurazioni di equilibrio relativo e se ne discuta la stabilità.]

Esercizio 5. [6+3] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q_1 = p_1 - \dfrac{q_2 p_2}{q_1}, \\ Q_2 = \sqrt{\dfrac{p_2}{q_1}}, \\ P_1 = -q_1, \\ P_2 = -2q_1 q_2 \sqrt{\dfrac{p_2}{q_1}}, \end{cases}$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione di coordinate.
2. Si dimostri che la trasformazione di coordinate è canonica trovandone una funzione generatrice di prima specie $F = F(q_1, q_2.Q_1, Q_2)$.
3. Si verifichi che la funzione generatrice F trovata al punto precedente soddisfa la condizione che la matrice di elementi $\partial^2 F/\partial q_i \partial Q_j$ è non singolare nel dominio $\mathcal{D}$.
4. [Si verifichi esplicitamente che la trasformazione di coordinate conserva le parentesi di Poisson fondamentali.]
5. Data l'hamiltoniana
$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{4q_1^2}\left(q_1^4 q_2^4 p_2^2 + (q_1 p_1 - q_2 p_2)^2\right),$$
si determini l'hamiltoniana nelle variabili (Q, P).
6. Si consideri il sistema hamiltoniano descritto dall'hamiltoniana $H(q, p)$ e si determini, nel nuovo sistema di coordinate (Q, P), la soluzione delle equazioni del moto che corrisponde ai dati iniziali $q_1(0) = q_2(0) = p_1(0) = p_2(0) = 1$.
7. Si determini la trasformazione inversa delle trasformazione canonica data.
8. [Si determini la soluzione del punto 6 nel sistema di coordinate originale (q_1, q_2, p_1, p_2)].