

# FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2021/2022

Recupero della prima prova di esonero (13-06-2022)

ESERCIZIO 1. [6+2] Si consideri in  $\mathbb{R}^2$  il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Si calcolino gli autovalori e gli autovettori di  $A$ .
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità.
3. Si trovi esplicitamente la soluzione al variare dei dati iniziali  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ .
4. [Si consideri il sistema

$$\dot{x} = (A + \alpha B)x, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si discuta se esistono valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  per i quali il sistema ammette solo punti di equilibrio asintoticamente stabili, e, in caso, si determinino esplicitamente tali valori.]

ESERCIZIO 2. [6+2] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$  sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{\sigma}{x-1} - \alpha x^2,$$

dove  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\sigma \in \{\pm 1\}$ .

1. Si consideri esplicitamente il caso  $\sigma = +1$  e  $\alpha > 0$ .
  - 1.1. Si studi il grafico dell'energia potenziale  $V(x)$ .
  - 1.2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato.
  - 1.3. Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio.
  - 1.4. Si studi qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi  $(x, \dot{x})$ .
  - 1.5. Si discuta l'esistenza di eventuali traiettorie periodiche.
  - 1.6. Si discuta l'esistenza di eventuali traiettorie asintotiche.
2. Si consideri ora il caso  $\alpha \leq 0$ , sempre per  $\sigma = \pm 1$ , e risponda alle stesse domande.
3. [Si consideri infine il caso  $\sigma = -1$  e si risponda alle stesse domande al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ .]

ESERCIZIO 3. [6+4] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$  sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \alpha \cos x + \sin^2 x + (\cos x + \sin^2 x)^2, \quad x \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

1. Si consideri esplicitamente il caso  $\alpha = 1$ .
  - 1.1. Si studi il grafico dell'energia potenziale  $V(x)$ .
  - 1.2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato.
  - 1.3. Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio.
  - 1.4. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi  $(x, \dot{x})$ .
2. [Si risponda alle stesse domande per  $\alpha = 2$ .]

ESERCIZIO 4. [6+2] Un punto materiale di massa  $\mu$  è soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho^2} + \log(1 + \rho^2) - 4 \log \rho, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sia  $L$  il modulo del momento angolare, e si assuma che sia  $L > 0$ . Al variare del coefficiente  $\alpha$  e di  $L$ , si risponda alle seguenti domande.

1. Si scrivano l'equazione del moto per la variabile  $\rho$  e per la variabile  $\theta$ .
2. Si disegni il grafico dell'energia potenziale efficace.
3. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato all'equazione per la variabile  $\rho$  e se ne discuta la stabilità.
4. Si studino qualitativamente le orbite nel piano  $(\rho, \dot{\rho})$ , e si determinino le traiettorie periodiche.
5. Si discutano le condizioni sotto le quali il moto complessivo del sistema è periodico.
6. [Si discuta come cambia lo scenario nel caso in cui si abbia  $L = 0$ .]

ESERCIZIO 5. [6+2] Un carrello scorre lungo la guida elicoidale descritta, in un sistema di riferimento fisso  $\kappa = Oxyz$ , dalle equazioni parametriche

$$x(\alpha) = \cos \alpha, \quad y(\alpha) = \sin \alpha, \quad z(\alpha) = h - \alpha \quad \alpha \in [0, h],$$

in modo tale che in ogni istante  $t \in [0, h]$  si abbia  $\alpha = t$ . Si consideri un sistema di riferimento mobile  $K = O'\xi\eta\zeta$  la cui origine sia solidale con il carrello e i cui assi siano orientati in modo che l'asse  $\zeta$  sia parallelo all'asse  $z$  e l'asse  $\eta$  sia rivolto, nella direzione radiale  $(x(t), y(t))$ , verso l'asse  $z$ . All'istante  $t = 0$  un sasso  $P$  di massa  $m$  viene lanciato dal carrello verso l'alto con velocità iniziale  $v$ .

1. Si scriva la trasformazione rigida  $D : K \rightarrow \kappa$  come composizione di una traslazione  $C$  con una rotazione  $B$ .
2. Si determini il moto  $\mathbf{q}(t)$  di  $P$  nel sistema di riferimento fisso.
3. Si determini il moto  $\mathbf{Q}(t)$  di  $P$  nel sistema di riferimento mobile
4. Si determinino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento del sasso.
5. [Quando il carrello raggiunge il fondo della guida si arresta: si calcoli la posizione di  $P$  in tale istante.]
6. [Si discuta per quali valori di  $h$  il sasso cade esattamente nel punto in cui si arresta il carrello, e, in corrispondenza di tali valori, si discuta se sia possibile fissare  $v$  in modo tale che il sasso e il carrello arrivino contemporaneamente in fondo alla guida.]