FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2021/2022

Recupero della seconda prova di esonero (13-06-2022)

<u>Esercizio 1.</u> [6+2] Un sistema meccanico è costituito da quattro punti P_1, P_2, P_3 e P_4, tutti di massa m, vincolati a muoversi in un piano verticale, che identifichiamo con il piano xy, in modo tale che:

- i punti P_1 e P_3 scorrono lungo l'asse x e si respingono con una forza di intensità $\alpha \log |x_1 - x_3|$, con $\alpha > 0$, se x_1 e x_3 denotano le posizioni dei due punti lungo l'asse;
- i punti P_2 e P_4 scorrono lungo l'asse y;
- due molle di lunghezza a riposo trascurabile e di costante elastica k collegano i punti P_1 e P_3 con i punti P_2 e P_4, rispettivamente;
- infine tutti i punti sotto sottoposti all'azione della forza peso (si indichi con g l'accelerazione di gravità).

1. Si scriva la lagrangiana del sistema. (Come coordinate lagrangiane si possono utilizzare, oltre a x_1 e x_3, le coordinate y_2 e y_4 che indicano le posizioni dei punti P_2 e P_4, rispettivamente, lungo l'asse y).
2. Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
4. [Si risponda alle stesse domande nel caso in cui sia aggiunta terza molla, sempre di lunghezza a riposo trascurabile e di costante elastica k, che colleghi il punto P_2 a un punto fisso collocato lungo l'asse y alla quota $y = d$, con $d > 0$.]

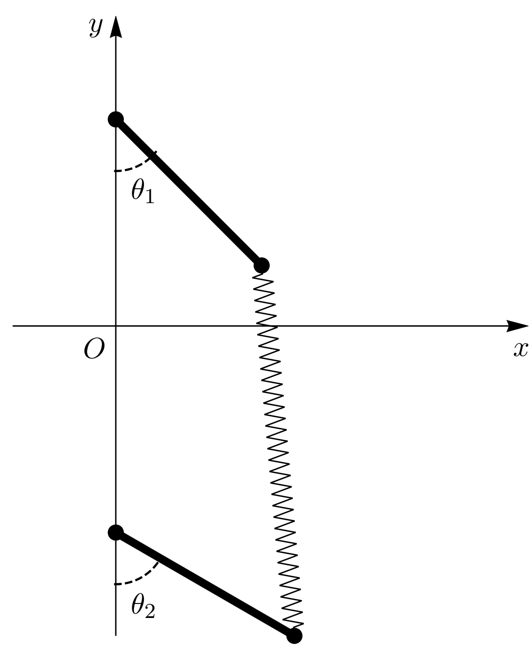
<u>Esercizio 2.</u> [6+4] Un sistema meccanico è costituito da 2 aste omogenee di massa M e di lunghezza ℓ, incernierate in due punti fissi disposti lungo un'asse verticale e, a distanza 2ℓ l'uno dall'altro. Le due aste sono vincolate a muoversi in un piano verticale contenente l'asse e, sotto l'azione della forza peso (sia g l'accelerazione di gravità), e una molla di lunghezza a riposo trascurabile e di costante elastica k ne collega tra loro gli estremi liberi.

1. Si scriva la lagrangiana del sistema, utilizzando come coordinate lagrangiane gli angoli θ_1 e θ_2 che le due aste formano con il verso discendente dell'asse e (cfr. la figura).
2. Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si verifichi che

$$(\theta_1, \theta_2) = (0, 0), \quad (\theta_1, \theta_2) = (0, \pi),$$
$$(\theta_1, \theta_2) = (\pi, 0), \quad (\theta_1, \theta_2) = (\pi, \pi)$$

sono quattro configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.

4. [Si individuino le restanti configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.]



<u>Esercizio 3.</u> [6+2] Un sistema meccanico è costituito da due punti materiali P_1 e P_2, entrambi di massa m, vincolati a muoversi lungo un profilo circolare di raggio $r = 1$, disposto in un piano verticale. I due

punti sotto sottoposti alla forza peso (sia g l'accelerazione di gravità) e sono collegati tra loro da una molla di costante elastica k e di lunghezza a riposo trascurabile.

1. Si scriva la lagrangiana del sistema. (Come coordinate lagrangiane si possono utilizzare gli angoli θ_1 e θ_2 che le i due punti formano con l'asse x).
2. Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
4. [Si determini la forza vincolare che agisce sul punto P_1 in corrispondenza di una configurazione di equilibrio stabile.]

<u>Esercizio 4.</u> [6+2] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = q\sqrt{1+q^2}, \\ P = p\dfrac{\sqrt{1+q^2}}{1+2q^2}, \end{cases}$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ e il codominio della trasformazione.
2. Si dimostri esplicitamente che si conservano le parentesi di Poisson fondamentali.
3. Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$.
4. Data l'hamiltoniana
$$H(q,p) = \frac{1}{2}\left(\frac{(1+q^2)p^2}{(1+2q^2)^2}\right) + \frac{q}{2}\sqrt{1+q^2},$$
si scriva l'hamiltoniana e si risolvano le equazioni di Hamilton nelle variabili (Q, P), in corrispondenza dei dati iniziali $(q(0), p(0)) = (1, 0)$.]
5. [Si calcoli la trasformazione inversa della trasformazione data e si determini la soluzione delle equazioni di Hamilton nelle variabili (q, p) con dati iniziali $(q(0), p(0)) = (1, 0)$.]

<u>Esercizio 5.</u> [6+2] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q_1 = 2\log q_1 \sqrt{p_1 q_1 + 2\dfrac{q_1^2 p_2}{q_2}}, \\ Q_2 = 2(q_2^2 - q_1^2)\sqrt{\dfrac{p_2}{2q_2}}, \\ P_1 = \sqrt{p_1 q_1 + 2\dfrac{q_1^2 p_2}{q_2}}, \\ P_2 = \sqrt{\dfrac{p_2}{2q_2}}. \end{cases}$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione.
2. Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F(q_1, q_2, P_1, P_2)$.
3. Si verifichi che la funzione generatrice $F = F(q_1, q_2, P_1, P_2)$ trovata al punto precedente soddisfa la condizione che la matrice 2×2 di elementi $\partial^2 F/\partial q_i \partial P_j$ è non singolare nel dominio $\mathcal{D}$.
4. Data l'hamiltoniana
$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}\left(p_1 q_1 + 2\frac{q_1^2 p_2}{q_2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{p_2}{2q_2}\right)^2,$$
si determini l'hamiltoniana nelle variabili (Q_1, Q_2, P_1, P_2).
5. [Si determini la soluzione delle equazioni del moto del sistema con hamiltoniana $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$ in corrispondenza dei dati iniziali $q_1(0) = p_1(0) = q_2(0) = p_2(0) = 1$.]