FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2021/2022

Prima prova di esonero (13-04-2022)

<u>Esercizio 1.</u> [6+2+2] Siano date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Si calcolino gli autovalori e gli autovettori di A.
2. Si dimostri per induzione che si ha $A^k = \mathbb{1} + \left(2^k - 1\right) B$ per ogni $k \geq 1$.
3. Si usi il risultato al punto 2 per calcolare l'esponenziale di At, per $t \in \mathbb{R}$.
4. Si usi il risultato al punto 3 per risolvere il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = y, \\ \dot{z} = 2z. \end{cases}$$

   in corrispondenza di un dato iniziale arbitrario $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.
5. [Si usi il risultato al punto 1 per trovare la soluzione senza passare per il calcolo dell'esponenziale di A.]
6. [Si utilizzi un altro metodo per risolvere il sistema.]

<u>Esercizio 2.</u> [6+3] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa m sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \log\left(\mathrm{e}^{x} - 1\right) - \alpha\, \mathrm{e}^{x}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Per $\alpha = 1$, si studi di il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Per $\alpha = 1$, si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Per $\alpha = 1$, si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.
4. [Si risponda alle stesse domande al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.]

<u>Esercizio 3.</u> [6+2] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa m sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{x^2(x^6 + x^2 + 1)}{x^2 + 1}.$$

1. Si studi di il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.
4. Si dimostri che ogni traiettoria con energia positiva è periodica.
5. Si scriva il periodo della traiettoria con energia $E = 1$ come integrale definito.

6. [Si calcoli il periodo delle traiettorie vicino a un punto di equilibrio stabile nell'approssimazione delle piccole oscillazioni.]

<u>Esercizio 4.</u> [6+1+3] Un punto materiale di massa μ è soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \log\left(\rho + \frac{\alpha}{\rho}\right), \qquad \alpha \geq 0.$$

Sia L il modulo del momento angolare, e si assuma che sia $L > 0$. Al variare del coefficiente α, si risponda alle seguenti domande.

1. Si scrivano l'equazione del moto per la variabile ρ e per la variabile θ.
2. Si disegni il grafico dell'energia potenziale efficace.
3. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato all'equazione per la variabile ρ e se ne discuta la stabilità.
4. Si studino qualitativamente le orbite nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
5. Si determinino le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
6. Si discutano le condizioni sotto le quali il moto complessivo del sistema è periodico.
7. [Si discuta come cambia lo scenario nel caso in cui si abbia $L = 0$.]
8. [Si risponda alle stesse domande nel caso in cui si abbia $\alpha < 0$.]

<u>Esercizio 5.</u> [6+3] Dato un un sistema di riferimento fisso $\kappa = Oxyz$, si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ la cui l'origine O' scorre nel piano xy lungo il profilo parabolico $y = x^2$ in modo tale che

- la componente di O' lungo l'asse x oscilla con legge oraria $x_{O'} = \sin(t - \pi/2)$;
- l'asse ξ si mantiene tangente al profilo, nel verso delle x positive, mentre l'asse ζ rimane parallelo all'asse z.

Al tempo $t = 0$, quando $x_{O'} = -1$, un punto materiale P_1 di massa m inizia a muoversi lungo l'asse η con velocità costante v, mentre un punto P_2, anch'esso di massa m, viene lanciato nella direzione dell'asse η positivo, sempre con velocità costante v, e si muove nel sistema κ sottoposto alla forza di gravità, diretta nel verso dell'asse y negativo (sia g l'accelerazione di gravità).

1. Si scriva la trasformazione rigida $D : K \to \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B.
2. Si determini il moto $\boldsymbol{q}(t)$ del punto P_1 nel sistema di riferimento fisso κ.
3. Si determini il moto $\boldsymbol{Q}(t)$ del punto P_1 nel sistema di riferimento mobile K.
4. Si determino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento del punto P_1.
5. Si calcoli il valore della forza di Coriolis e della forza centrifuga che agiscono sul punto P_1 nel sistema di riferimento mobile K.
6. [Si descriva il moto del punto P_2 nei due sistemi di riferimento e si mostri che è possibile fissare v in modo tale che P_2 ricada in O' quando $x_{O'}$ ha compiuto mezza oscillazione raggiungendo il valore 1.]