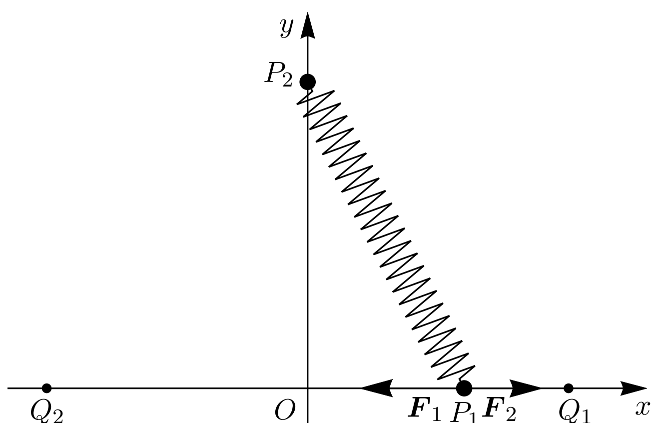
FM210 - Meccanica Analitica
Anno Accademico 2021/2022

Seconda prova di esonero (08-06-2022)

<u>Esercizio 1.</u> [6+3] Un sistema meccanico è costituito da 4 punti materiali P_1, P_2, P_3 e P_4, tutti di massa m, disposti in corrispondenza dei vertici di un quadrato di lato $\ell = 1$; siano P_2 e P_4 i punti connessi a P_1 da due lati del quadrato. Il quadrato è libero di ruotare in un piano verticale, intorno al suo centro C, che è fisso. Si scelga nel piano un sistema di coordinate xy tale che l'origine coincida con C e l'asse y sia diretto in verso opposto a quello della forza di gravità (si indichi con g l'accelerazione di gravità). Tre molle, tutte di di lunghezza a riposo trascurabile e di costante elastica k, collegano il punto P_1 al punto $Q_1 = (2, 0)$ e i punti P_2 e P_3 al punto $Q_2 = (0, -2)$.

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange, utilizzando come coordinata lagrangiana l'angolo θ che il segmento OP_1 forma con l'asse x.
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se discuta la stabilità.
3. Si discuta come cambia la discussione se si elimina la molla che unisce P_2 a Q_2.
4. [Si calcoli la reazione vincolare che agisce sul punto P_1 in funzione di θ e $\dot{\theta}$.]

<u>Esercizio 2.</u> [6+2] Due punti materiali P_1 e P_2, entrambi di massa m, si muovono in un piano verticale, che identifichiamo con il piano xy. Il piano ruota intorno all'asse verticale y con velocità angolare costante ω; i due punti sono sottoposti alla forza di gravità (si indichi con g l'accelerazione di gravità) e alla forza centrifuga, e sono inoltre collegati da una molla di lunghezza trascurabile e di costante elastica $k < m\omega^2$; il punto P_2 scorre lungo l'asse y; infine il punto P_1 si muove lungo l'asse x e interagisce con due punti fissi $Q_1 = (1, 0)$ e $Q_2 = (-1, 0)$ tramite due forze conservative repulsive $\boldsymbol{F}_1$ e $\boldsymbol{F}_2$, di intensità rispettivamente $\alpha d(P_1, Q_1)^{-2}$ e $\alpha d(P_1, Q_2)^{-2}$, dove $\alpha > 0$ e $d(P_1, Q_i)$ è la distanza tra P_1 e Q_i, con $i = 1, 2$ (cfr. la figura).



1. Si determinino le energie potenziali $V_1(x)$ e $V_2(x)$ tali che $\boldsymbol{F}_1 = -(\partial V_1/\partial x, 0)$ e $\boldsymbol{F}_2 = -(\partial V_2/\partial x, 0)$.
2. Si scriva la lagrangiana del sistema (come coordinate lagrangiane si possono utilizzare l'ascissa x del punto P_1 e l'ordinata y del punto P_2).
3. Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange.
4. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
5. [Si discuta il caso in cui si abbia invece $k \geq m\omega^2$.]

ESERCIZIO 3. [6+4] Un'asta omogenea di lunghezza $\ell = 1$ e di massa M si muove nel piano verticale xy in modo tale che un estremo A scorre lungo l'asse y (asse verticale) e l'altro estremo B scorre lungo il profilo parabolico $y = x^2$. L'asta è soggetta alla forza di gravità (sia g l'accelerazione di gravità) e il suo estremo A è collegato al punto più basso del profilo tramite una molla di lunghezza a riposo trascurabile e di costante elastica k. All'istante iniziale l'asta forma un angolo $\pi/2$ con l'asse y.

1. Si scrivano le posizioni del punto A e del centro di massa C dell'asta in termini dell'angolo θ che l'asta forma con l'asse y e si determini l'intervallo in cui varia θ.
2. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange utilizzando l'angolo θ come variabile lagrangiana.
3. Si mostri che $\theta = 0$ costituisce una configurazione di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
4. [Si completi la discussione del punto 1 se non si assume nulla sulla posizione iniziale dell'asta.]
5. [Si determinino le altre configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.]

ESERCIZIO 4. [6+2] Si consideri la lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{1 + q^2} \right) \dot{q}^2.$$

1. Si scrivano l'hamiltoniana $\mathcal{H}(q, p)$ associata e le equazioni di Hamilton corrispondeenti.
2. Si determini il dominio della la trasformazione di coordinate

$$Q = \frac{p}{q} \sqrt{\frac{q^2}{p^2} + (1 + q^2)}, \qquad P = \sqrt{\frac{q^2}{p^2} + (1 + q^2)},$$

   e si dimostri che è canonica trovandone una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$.
3. Si determini l'hamiltoniana $\mathcal{K}(Q, P)$ nel sistema di coordinate (Q, P).
4. [Si usi il risultato del punto precedente per trovare la soluzione $q(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange con dati iniziali $(q(0), \dot{q}(0)) = (1, 1)$.]

ESERCIZIO 5. [6+2] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$Q_1 = \frac{p_1}{2q_1} \left(q_1^2 + q_2^2 \right), \qquad Q_2 = q_2^2, \qquad P_1 = \log \frac{p_1}{2q_1}, \qquad P_2 = \frac{p_2}{2q_2} - \frac{p_1}{2q_1}.$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione.
2. Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F(q_1, q_2, P_1, P_2)$.
3. Si verifichi che la funzione generatrice $F = F(q_1, q_2, P_1, P_2)$ trovata al punto precedente soddisfa la condizione che la matrice 2×2 di elementi $\partial^2 F / \partial q_i \partial P_j$ è non singolare nel dominio $\mathcal{D}$.
4. Data l'hamiltoniana

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{q_1 p_2 - q_2 p_1}{q_1 q_2} \right)^2 + \frac{p_1^2}{2q_1^2},$$

   si determini l'hamiltoniana nelle variabili (Q_1, Q_2, P_1, P_2).
5. [Si determini la soluzione delle equazioni del moto del sistema con hamiltoniana $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$ in corrispondenza dei dati iniziali $q_1(0) = p_1(0) = q_2(0) = p_2(0) = 1$.]