FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2021/2022

Preparazione alla prova di esonero (04-04-2022)

<u>Esercizio 1.</u> [6+2] Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Si calcolino autovalori e autovettori di A.
2. Si dimostri per induzione che $A^k = 2^{k-1}A$ per ogni $k \geq 1$.
3. Si usi il risultato al punto 2 per calcolare l'esponenziale di At, per $t \in \mathbb{R}$.
4. Si usi il risultato al punto 3 per risolvere il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 2z. \end{cases}$$

   in corrispondenza del dato iniziale $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (1, 0, 1)$.

5. [Si usi il risultato al punto 1 per trovare la soluzione senza passare per il calcolo dell'esponenziale di A.]
6. [Si utilizzi un altro metodo per risolvere il sistema.]

<u>Esercizio 2.</u> [6+2] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = x^2(x - \alpha)\left(x^2 - 1\right).$$

1. Per $\alpha = 0$, si studi di il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Per $\alpha = 0$, si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Per $\alpha = 0$, si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.
4. [Si risponda alle stesse domande per $\alpha = 1$.]

<u>Esercizio 3.</u> [6+2] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

1. Si dimostri che la traiettoria con dato iniziale $(x(0), \dot{x}(0)) = (-1, 0)$ è periodica.
2. Si scriva il periodo della traiettoria come integrale definito.

3. Si scrivano le equazioni del sistema dinamico associato.
4. Si dimostri che $x = 0$ corrisponde a un punto di equilibrio stabile per il sistema dinamico.
5. Si calcoli il periodo delle traiettorie vicino al punto di equilibrio nell'approssimazione delle piccole oscillazioni.
6. [Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.]

<u>Esercizio 4.</u> [6+2] Un punto materiale di massa μ è soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \frac{1}{4}\alpha\rho^4 + 2\rho, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sia L il modulo del momento angolare L, e si assuma che sia $L > 0$. Al variare del coefficiente α, si risponda alle seguenti domande.

1. Si scrivano l'equazione del moto per la variabile ρ.
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Si disegni il grafico dell'energia potenziale efficace.
4. Si studino qualitativamente le orbite nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
5. Si determinino le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$, e si discutano le condizioni sotto le quali il moto complessivo del sistema è periodico.
6. Si discuta per quali valori dei parametri si hanno orbite aperte.
7. [Si discuta se, per le orbite di cui al punto 7, il tempo di fuga è finito o infinito.]
8. [Si discuta come cambia lo scenario nel caso in cui si abbia $L = 0$.]

<u>Esercizio 5.</u> [6+2] Si consideri un un sistema di riferimento fisso $\kappa = Oxyz$ e un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$, solidale con una cabina che si muove verso il basso (ovvero nella direzione dell'asse z negativo) sottoposto all'accelerazione di gravità g, in modo tale che l'asse ζ si mantenga parallelo all'asse z e l'asse ξ ruoti intorno all'asse ζ con velocità angolare costante ω; i due sistemi di riferimento coincidono al tempo $t = 0$. Nel sistema di riferimento κ, al tempo $t = 0$, un punto materiale P viene lanciato verso l'alto (ovvero nella direzione dell'asse z positivo), dalla posizione iniziale $(1, 0, 0)$, con velocità costante v.

1. Si scriva la trasformazione rigida $D : K \to \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B.
2. Si determini il moto $\boldsymbol{q}(t)$ del punto P nel sistema di riferimento fisso κ.
3. Si determini il moto $\boldsymbol{Q}(t)$ del punto P nel sistema di riferimento mobile K.
4. Si determino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento del punto P.
5. Si calcoli il valore della forza di Coriolis e della forza centrifuga che agiscono sul punto P nel sistema di riferimento mobile K.
6. [Al tempo t_0 il sistema di riferimento K si blocca: si dimostri che, scegliendo opportunatamente t_0, esiste un tempo $t_1 > t_0$ in cui P riassume in K la stessa posizione iniziale $(1, 0, 0)$ e si calcoli t_1.]