Elisabetta Colantoni e Giulia Degni
FM-210 Meccanica Analitica
1 marzo 2022

Tutorato I

Question 1. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}, \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Si calcolino gli autovalori e gli autovettori.
2) Si determini la natura del punto di equilibrio.
3) Scrivere la soluzione generale del sistema.
4) Risolvere lo stesso sistema per B.

Question 2. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}, \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Se ne trovi la soluzione al variare del dato iniziale

Question 3. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}, \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

con condizioni iniziali generiche $x(0) = x_0$. Se ne trovi la soluzione al variare del parametro α.

Question 4. Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy \\ \dot{y} = -y^2 + (2e^{-x} - 1)^2 - 4xe^{-x}(2e^{-x} - 1) \end{cases}$$

Si verifichi che la funzione $H(x, y) = x(y^2 - (2e^{-x} - 1)^2)$ è una costante del moto.

Question 5. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B \\ x(0) = 0 \end{cases}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Question 6. Si consideri la forza posizionale

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

definita come segue:

$$\begin{pmatrix} kx_1 cos^2(ax_3) \\ kx_2 cos^2(ax_3) \\ -\frac{ak}{2}(x_1^2 + x_2^2) sin(2ax_3) \end{pmatrix}$$

dove k ed a sono parametri positivi. Si stabilisca se $\mathbf{F}$ è conservativa e, in caso, si determini l'energia potenziale corrispondente.

Question 7. Sia $\Phi(t, x)$ il flusso di un sistema autonomo del primo ordine e T il periodo di una traiettoria periodo

1) Dimostrare che la definizione di periodo non dipende dal punto sulla traiettoria, ovvero che ogni punto dell'orbita ha lo stesso periodo.
2) Dimostrare che $\Phi(t + nT, x) = \Phi(t, x)\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Question 8. Sia S l'insieme delle soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + ... + a_1\dot{x} + a_0 x = f(t) \\ x(0) = x_{1,0} \\ \dot{x}(0) = x_{2,0} \\ ... \\ x^{(n-1)}(0) = x_{n-1,0} \end{cases}$$

al variare dei dati iniziali, e sia S_0 l'insieme delle soluzioni del problema omogeneo associato.

1) Dimostrare che S_0 è uno spazio vettoriale e che S è uno spazio affine su S_0.
2) Dedurre da questo la validità del metodo di variazione delle costanti.