

### Tutorato III

**Question 1.** Sia  $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^2$  e sia  $x_0 \in \mathcal{E}_M^0$  un punto di massimo relativo per  $V$  con  $V''(x_0) \neq 0$ . Dimostrare che  $x_0$  è un punto d'equilibrio instabile utilizzando il teorema 4.43 [G].

**Question 2.** Si studi il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$ , soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{|x|} + x + \alpha \log x^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Al variare di  $\alpha$  si discutano i seguenti punti.

- 1) Si studi il grafico dell'energia potenziale.
- 2) Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
- 3) Si analizzino qualitativamente il moto nel piano  $(x, \dot{x})$ .
- 4) Per  $\alpha = 0$  si verifichi che la traiettoria con dato iniziale  $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(1, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$  è periodica.
- 5) Si scriva il periodo della traiettoria del punto (4) come integrale definito e se ne dia una stima

**Question 3.** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$ , soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = x^3 e^{-x^2}$$

- Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato.
- Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- Studiare il grafico dell'energia potenziale.
- Analizzare qualitativamente il moto nel piano delle fasi.

**Question 4.** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale conservativo descritto dall'equazione

$$\ddot{x} = \frac{x^2 - 2x}{(x^2 - 2x + 2)^2}$$

Si scelga l'energia potenziale in modo tale che sia  $V(0) = -1/2$

- Verificare che il moto che si svolge sulla curva di livello  $\Gamma_E$ , con  $E = -1/5$ , per un'opportuna scelta del dato iniziale  $\bar{x}$ , è periodico.
- Se ne stimi il periodo.
- Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità
- Dopo aver tracciato un grafico dell'energia potenziale, studiare le curve di livello nel piano delle fasi.

**Question 5. (Lennard - Jones)** Considerare il moto di un punto materiale di massa  $m = 1$

$$m\ddot{x} = -V'(x)$$

soggetto ad un potenziale

$$V(x) = V_0 \left( \left( \frac{x_0}{x} \right)^{12} - \left( \frac{x_0}{x} \right)^6 \right)$$

dove  $V_0, x_0 > 0$ .

- 1) Studiare qualitativamente il moto, procedendo come descritto nell'esercizio 1 (si disegni il grafico di  $V$ , quindi delle curve di livello al variare di  $E$ , etc.)
- 2) Scrivere il periodo dei moti periodici in forma di integrale definito.
- 3) Scelto un dato iniziale  $x_i$  corrispondente ad un moto aperto: il tempo che il sistema impiega per arrivare da  $x_i$  a infinito è finito o no? Il moto è definito globalmente?