Elisabetta Colantoni e Giulia Degni
FM-210 Meccanica Analitica
15 marzo 2022

# Tutorato II

**Question 1.** Si consideri l'equazione del moto per un punto materiale di massa $m = 1 \mathrm{su} \mathbb{R}$,

$$\ddot{x} = x^2 - x$$

1. Si determini una grandezza conservata del moto.
2. Si disegnino le curve di livello corrispondenti nel piano delle fasi.
3. Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici, a moti aperti e a moti limitati asintotici.

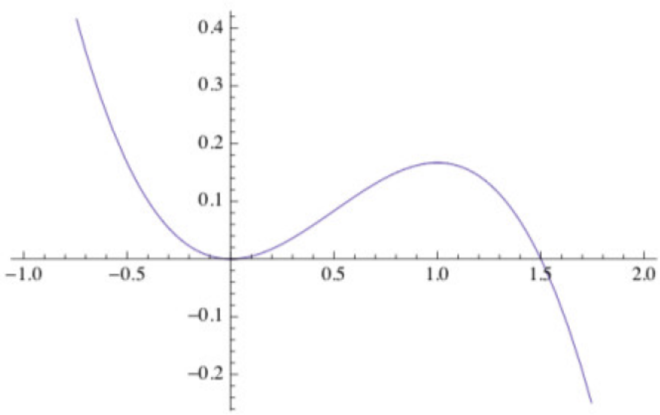
1. L'energia $E := \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ è conservata:

$$\dot{E} = \dot{x}\left(\ddot{x} + x - x^2\right) = 0$$

2. Le curve di livello per un'energia $E$ fissata sono determinate da

$$\dot{x}(x) = \pm\sqrt{2(E - V(x))} = \pm\sqrt{2\left(E - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)}$$

Il grafico di $V(x)$ è:




$V(x)$ ha un minimo in 0 e un massimo in 1 , e $V(0) = 0, V(1) = 1/6,\ \lim_{x\to\pm\infty} V(x)) = \pm\infty$; Inoltre $V$ decresce in $(-\infty, 0)$, cresce in $(0, 1)$ e decresce in $(1, \infty)$. Quindi

- $E < 0, \dot{x}(x)$ e definito per $x \geq x_E$ dove $x_E$ è l'unica soluzione di $V\left(x_E\right) = E$, e $\dot{x}\left(x_E\right) = 0$, e

$$\left.\frac{d}{dx}\dot{x}\right|_{x=x_E+\varepsilon} = -\frac{V'\left(x_E + \varepsilon\right)}{2\sqrt{2\left(E - V\left(x_E + \varepsilon\right)\right)}}$$

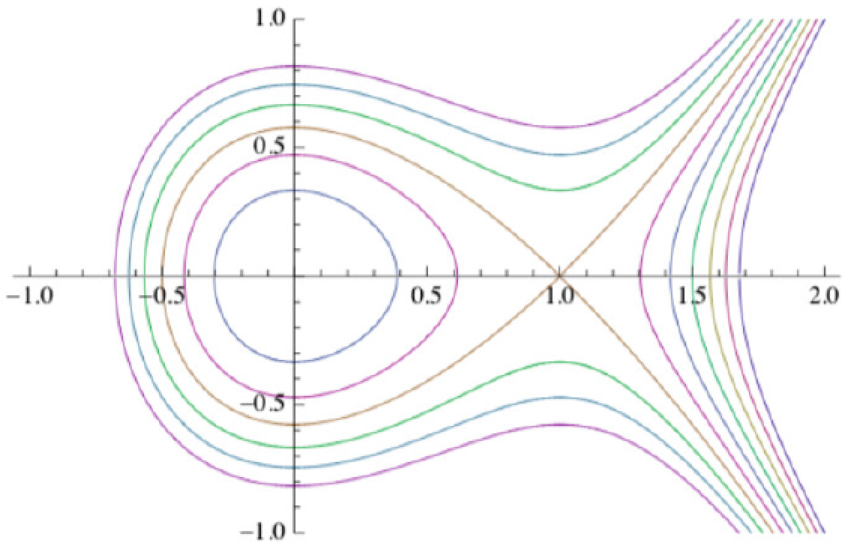
con $V'\left(x_E\right) \neq 0$ quindi $\dot{x}'\left(x_E\right) = \pm\infty$ (dove il ' significa una derivata rispetto a $x$. Inoltre $\dot{x}(x) \to \pm\infty$ quando $x \to \infty$, e $\dot{x}(x) \sim x^{3/2}$ all'infinito.

- se $0 < E < 1/6, \dot{x}(x)$ e definito per $x \in \left[x_E^{(-)}, x_E^{(+)}\right]$e per $x \geq x_E$ e per $x^{(\pm)}$e $x_E$ sono le tre soluzioni di $V\left(x^{(\pm)}\right) = E$. Abbiamo $\dot{x}'\left(x^{(\pm)}\right) = \pm\infty, \dot{x}'\left(x_E\right) = \pm\infty$. Inoltre $\dot{x}(x) \to \infty$ quando $x \to \infty$, e $\dot{x}(x) \sim x^{3/2}$ all'infinito.

- se $E > 1/6, \dot{x}(x)$ e definito per $x \geq x_E$ dove $x_E$ è l'unica soluzione di $V\left(x_E\right) = E$, e $\dot{x}\left(x_E\right) = \pm\infty$. Inoltre $\dot{x}(x) \sim x^{3/2}$ all'infinito.

- se $E = 0, \dot{x}(x)$ e definito per $x = 0$, nel qual caso $\dot{x}(x) = \dot{x}(0) = 0$, e per $x \geq x_0$ dove $x_0$ è la seconda soluzione $V\left(x_0\right) = 0$, nel qual caso la traiettoria ha le stesse proprietà qualitative di quelle aperte a energia negativa.

- se $E = 1/6, \dot{x}(x)$ e definito per $x \in \left[x_E^{(-)}, 1\right]$ e per $x \in [1, \infty)$ dove $x_E^{(-)}$ è la prima delle due soluzioni di $V\left(x_E^{(-)}\right) = E$. Abbiamo $\dot{x}'\left(x_E^{(-)}\right) = \pm\infty, \dot{x}'(1) = \pm 1$. Inoltre $\dot{x}(x) \to \infty$ quando $x \to \infty$, e $\dot{x}(x) \sim x^{3/2}$ all'infinito. Le curve di livello avranno la forma di quelle disegnate nel seguente grafico




3. - se $x(0) \geq x_E$ dove $x_E$ è la più grande delle soluzioni di $V(x_E) = E$, $E \neq 1/6$, allora il moto è aperto.

- se $0 < E < 1/6, x(0) \left[x_E^{(-)}, x_E^{(+)}\right]$e per $x_E^{(\pm)}$sono le due soluzioni più piccole di $V\left(x_E^{(\pm)}\right) = E$, allora $V'\left(x_E^{(\pm)}\right) \neq 0$ quindi il moto è chiuso e periodico.
- se $E = 0$ e $x(0) = 0$, il moto è costante, quindi chiuso e periodico.
- se $E = 1/6$ e $x(0) > 1$, allora il moto è aperto.
- se $E = 1/6$ e $x(0) < 1$, allora il moto è limitato e asintotico (omoclina).

**Question 2.** Per ognuno dei seguenti potenziali $V(x)$, considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto a tale potenziale e

1. Scrivere esplicitamente l'equazione del moto e verificare esplicitamente la conservazione dell'energia meccanica $E = \dot{x}^2/2 + V(x)$.
2. Si disegni il grafico dell'energia potenziale.
3. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato.
4. Si disegnino le curve di livello corrispondenti nel piano delle fasi
5. Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a (qualora esistano) moti periodici, a moti aperti e a moti limitati asintotici.

## 2.1. Potenziali :

- a) $V(x) = x + 2\sin x$
- b) $V(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$
- c) $V(x) = -\frac{1}{2}e^{x^2}$

## 2.2. Soluzione a

1. L'equazione del moto è

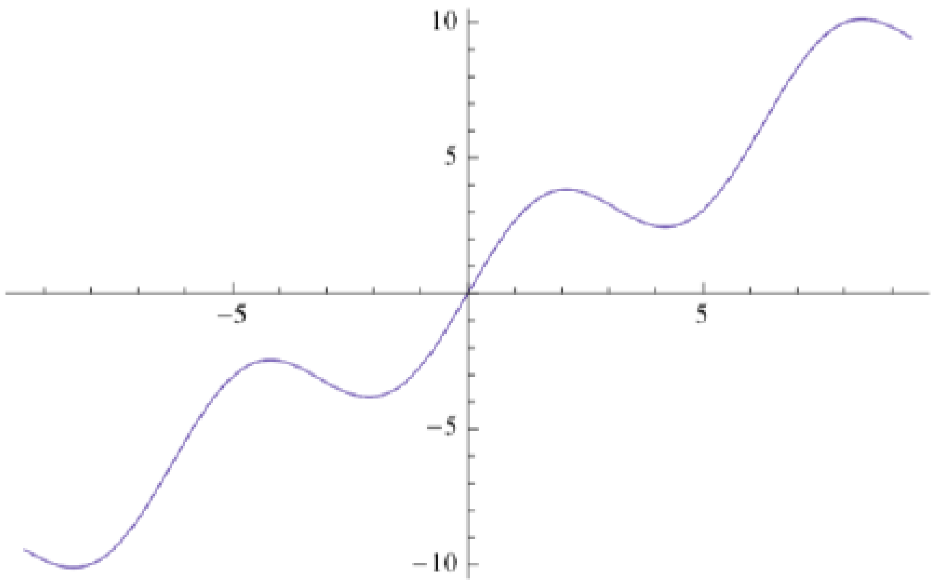
$$\ddot{x} = -V'(x) = -2\cos x$$

L'energia

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)$$

è una grandezza conservata (un integrale primo del moto):

$$\dot{E} = \dot{x}(\ddot{x} + 1 + 2\cos x) = 0$$




I punti di equilibrio del sistema sono i punti critici dell'energia potenziale (ossia gli $x$ tali che $U'(x) = 0$ ) sono

$$a_k := \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, b_k := -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Gli $a_k$ son massimi e i $b_k$ sono minimi. Inoltre abbiamo

$$V(a_k) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi + \sqrt{3}, \quad V(b_k) = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi - \sqrt{3}$$

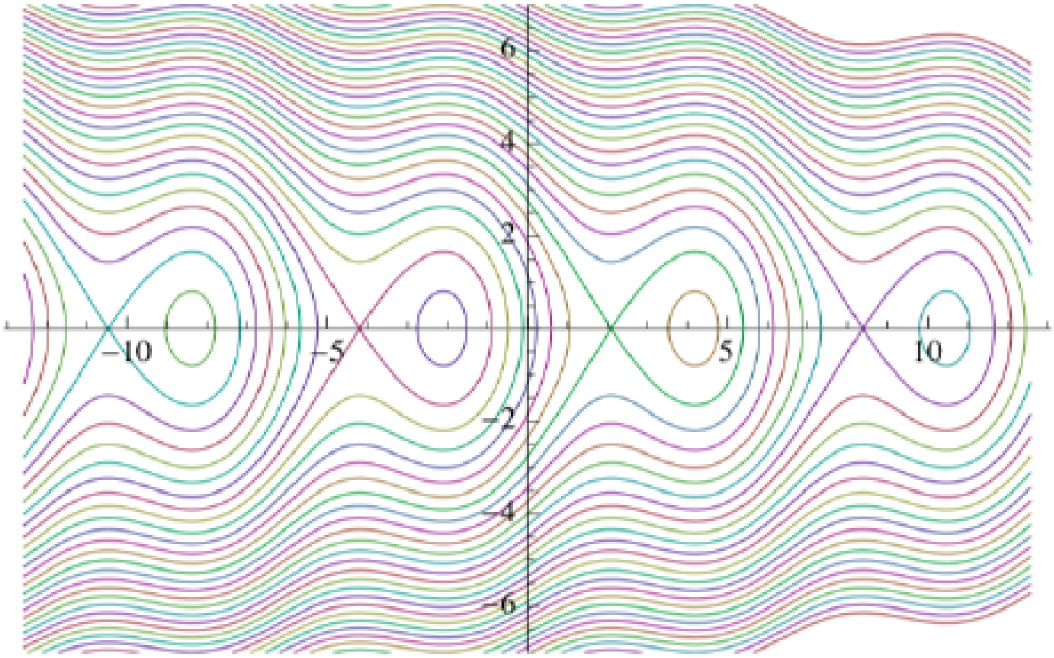
quindi $V(b_{k+1}) > V(b_{k-1})$ (perchè $\frac{4\pi}{3} > 4 > 2 > \sqrt{3}\Big)$.

4. Le curve di livello per una energia E fissata sono determinate da

$$\dot{x}(x) = \pm\sqrt{2(E - V(x))} = \pm\sqrt{2(E - x - 2\sin x)}$$

- Se $E \in (V(b_{k+1}), V(a_k)), V(x) = E$ ha 3 soluzioni: $x_E < x_E^{(-)} < x_E^{(+)}$, e $\dot{x}(x)$ è definito per $x \le x_E$ e per $x \in \left[x_E^{(-)}, x_E^{(+)}\right]$. Come $V'\left(x_E^{(\pm)}\right) \neq 0$ e $V'(x_E) \neq 0, \dot{x}'\left(x_E^{(\pm)}\right) = \pm\infty$ e $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$. Inoltre $\dot{x}(x) \sim \pm x$ per $x \to -\infty$.
- Se $E \in (V(a_{k-1}), V(b_{k+1})), V(x) = E$ ha una soluzione: $x_E$, e $\dot{x}(x)$ è definito per $x \le x_E$, e $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty$. Inoltre $\dot{x}(x) \sim \pm x$ per $x \to -\infty$.
- Se $E = V(b_k), \dot{x}(x)$ è definito per $x = b_k$ e per $x \le x_E$ dove $x_E$ è la soluzione di $V(x_E) = E$ diversa da $b_k, \dot{x}(b_k) = 0, \dot{x}'(x_E) = \pm\infty$e $\dot{x}(x) \sim \pm x$ per $x \to -\infty$.
- Se $E = V(a_k), V(x) = E$ ha due soluzioni: $a_k < x_E$, e $\dot{x}(x)$ è definito per $x \le a_k$ e per $x \in [a_k, x_E]$, e $\dot{x}'(x_E) = \pm\infty, \dot{x}'(a_k) = \pm 3^{1/4}/2$. Inoltre $\dot{x}(x) \sim \pm x$ per $x \to -\infty$.

Le curve di livello avranno la forma di quelle disegnate:




5. Usando il ragionamento della domanda precedente, troviamo che
- se $x(0) \leq x_E$ dove $x_E$ è la più piccola delle soluzioni di $V(x_E) = E$ e se $E \neq V(a_k)$ allora il moto non è limitato.
- se $E \in (V(b_{k+1}), V(a_k))$ e $x(0) \in (b_{k+1}, a_k)$ allora il moto è limitato e periodico.
- se $E = V(b_k)$ e $x(0) = b_k$ allora il moto è costante.
- se $E = V(a_k)$ e $x(0) > a_k$ allora il moto è limitato e aperiodico.

### 2.3. Soluzione b

1. L'equazione del moto è

$$\ddot{x} = x^3 - x$$

Si verifica immediatamente che l'energia meccanica $E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)$ è una costante del moto, infatti

$$\frac{dE}{dt} = \ddot{x}\dot{x} - x^3\dot{x} + x\dot{x} = \dot{x}\left(\ddot{x} - \left(x^3 - x\right)\right) = 0$$

usando 1 .

2. Innanzitutto dobbiamo trovare i punti di equilibrio, ovvero i punti in cui si annulla la derivata del potenziale:

$$V'(x) = -x^3 + x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \pm 1$$

Quindi: Esistono tre punti di equilibrio: $(x(0), \dot{x}(0)) = (0,0), (\pm 1, 0)$. Inoltre

$$V'(x) = x\left(1 - x^2\right)\begin{cases} > 0 \text{ se } 0 < x < 1 \text{ oppure } x < -1 \\ < 0 \text{ se } -1 < x < 0 \text{ oppure } x > 1 \end{cases}$$

e $V''(x) = -3x^2 + 1$, cosicché $V''(0) = 1 > 0, V''(\pm 1) = -2 < 0$, quindi
- $(0,0)$ è un punto di equilibrio stabile (perché punto 0 di minimo isolato del potenziale e quindi localmente $(0,0)$ è un minimo isolato dell'energia meccanica, quindi le curve di livello di $E$ sono curve chiuse comprese tra due ellissi. Ma allora dato che le traiettorie del sistema dinamico vivono sulle curve di livello di $E$, se parto su una di queste curve chiuse vicino a $(0,0)$ rimango lì vicino. Quindi per definizione è stabile)

- $(\pm 1, 0)$ sono due punti di equilibrio instabili (criterio del linearizzato).

I grafici delle curve di livello hanno la forma descritta in figura 2 .

Essendo $V(0) = 0, V(\pm 1) = \frac{1}{4}$, otteniamo che:

- Se il sistema parte con velocita nulla su uno dei punti di equilibrio, allora il moto è costante.
- Se $E > \frac{1}{4}$ i moti sono aperti per tutti i dati iniziali.

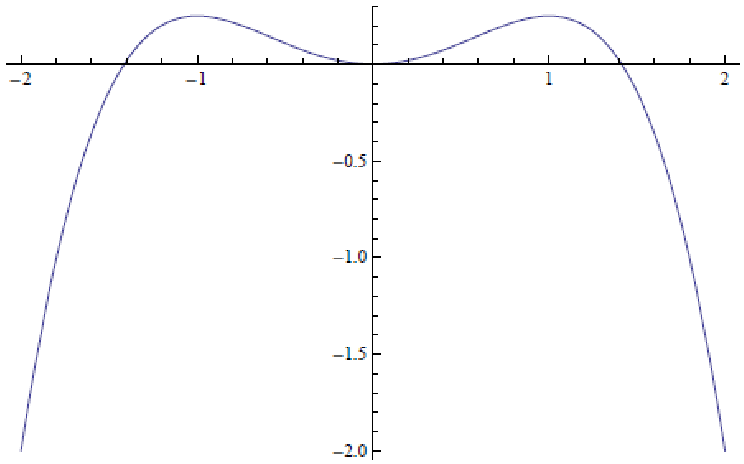



Figura 1: Grafico di $V(x) = -x^4/4 + x^2/2$

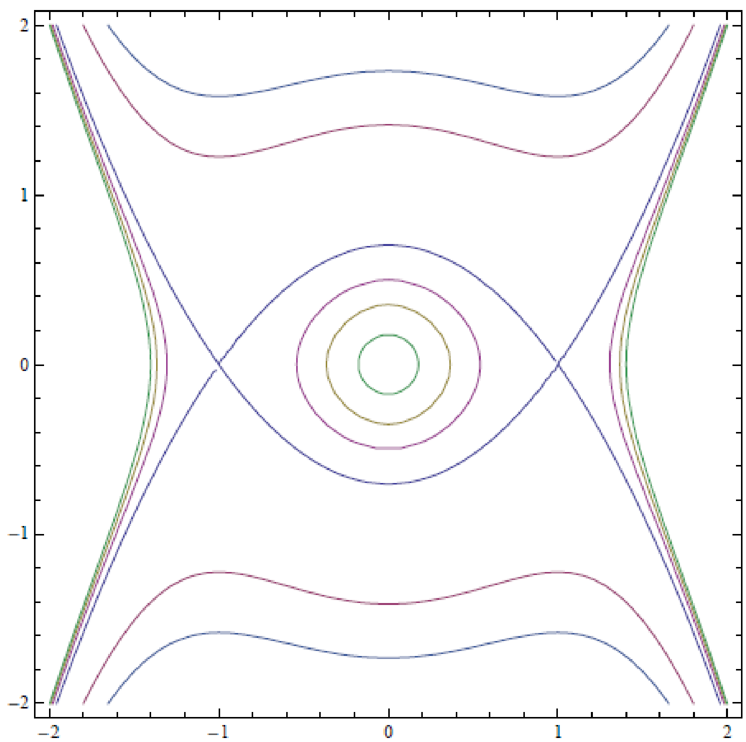



Figura 2: Curve di livello per diversi valori di $E = \dot{x}^2/2 + V(x)$

- Se $0 < E < \frac{1}{4}$ e $|x| < 1$, il moto è periodico intorno al minimo del potenziale.
- Se $0 < E < \frac{1}{4}$ e $|x| > 1$, il moto è aperto.
- Se $E = 1/4$ e $x(0) \in (-1, 1)$ il moto è limitato e a periodico, e asintotico nel passato e nel futuro a $\pm 1$, a seconda del valore iniziale della velocità ( se $\dot{x}(0) > 0$, allora $\lim_{t \to \pm\infty} = \pm 1$, e viceversa). Se $E = 1/4$ e $x(0) < -1$ il moto è aperto, e asintotico nel passato/futuro a $-1$, a seconda che $\dot{x}(0)$ sia negativa/positiva.

Se $E = 1/4$ e $x(0) > 1$ il moto è aperto, e asintotico nel passato/futuro a 1 , a seconda che $\dot{x}(0)$ sia positiva/negativa.

Consideriamo $0 < E < \frac{1}{4}$, e chiamiamo $x_E^{(\pm)}$le due soluzioni dell'equazione $E = V(x)$ tali che $x_E^{(\pm)} \in (-1,1)$. Allora, il tempo che la particella impiega per arrivare da $x_E^{(-)}$a $x_E^{(+)}$è

$$t\left(x_E^{(+)}\right) - t\left(x_E^{(-)}\right) = \int_{t\left(x_E^{(-)}\right)}^{t\left(x_E^{(+)}\right)} ds = \int_{x_E^{(-)}}^{x_E^{(+)}} \frac{dx}{\dot{x}} = \int_{x_E^{(-)}}^{x_E^{(+)}} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}}$$

Per calcolare il periodo del moto dobbiamo sommare il tempo di andata e quello di ritorno, quindi

$$T = 2\left[t\left(x_E^{(+)}\right) - t\left(x_E^{(-)}\right)\right] = 2\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}} = \sqrt{2}\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$

## 2.4. Soluzione c

1. L'equazione del moto è $\ddot{x} = xe^{x^2}$. Si verifica immediatamente che l'energia meccanica è conservata, infatti

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) = \tfrac{1}{2}\dot{x}^2 - \tfrac{1}{2}e^{x^2} \\ \tfrac{dE}{dt} &= \dot{x}\ddot{x} - x\dot{x}e^{x^2} = \dot{x}\left(\ddot{x} - xe^{x^2}\right) = 0 \end{aligned}$$

2. Notiamo prima di tutto che $V(x) \leq -1/2$ per ogni $x$. Inoltre

$$V'(x) = -xe^{x^2}\begin{cases} > 0 \text{ se } x < 0 \\ = 0 \text{ se } x = 0 \\ < 0 \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

e

$$V''(x) = -e^{x^2} - 2x^2e^{x^2} < 0 \text{ per ogni } x$$

Quindi l'unico punto fisso del sistema è $(x,\dot{x}) = (0,0)$, ed è un punto di equilibrio instabile. Per tutti gli altri dati iniziali, i moti sono moti aperti, non ci sono moti periodici. Il grafico del potenziale e delle curve di livello sono nelle figure 3 e 4 .

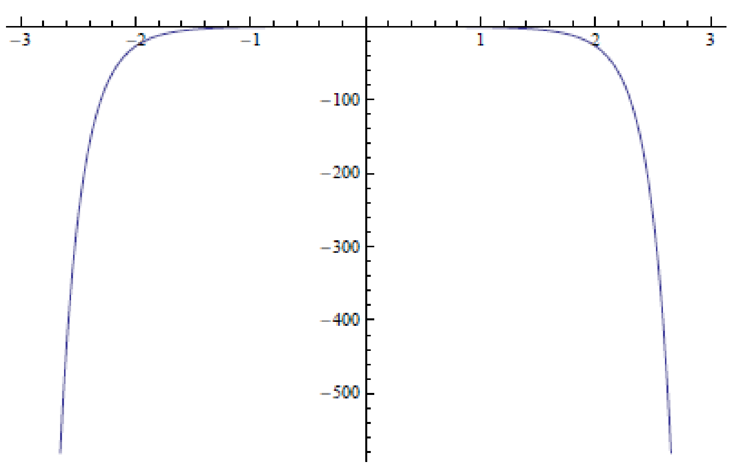



Figura 3: Grafico di $V(x) = -\frac{e^{x^2}}{2}$

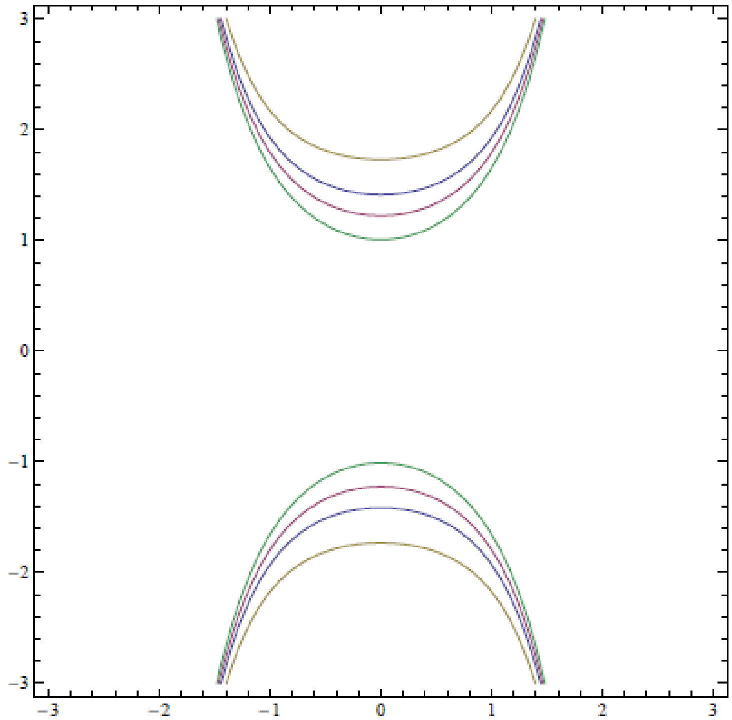



Figura 4: Grafico delle curve li livello per diversi valori di $E = \dot{x}^2/2 + V(x)$. Nota: i valori in figura corrispondono tutti a valori di $E$ maggiori di $-1/2$. La separatrice e le curve con $E < -1/2$ non sono riportate esplicitamente.

**Question 3.** Si consideri l'equazione del moto per un punto materiale di massa $m = 1 \mathrm{su} \mathbb{R}$,

$$\ddot{x} = -V'(x), \quad V(x) = \frac{x^4}{4} + \alpha \frac{x^2}{2}$$

1. Si determino i punti di equilibrio al variare di $\alpha \in \mathbb{R} \backslash 0$.
2. Si studi la stabilità dei punti di equilibrio (non degeneri). 3. Si determini l'energia del sistema.
4. Si verifichi che $E$ è una costante del moto.

Soluzione 1. I punti di equilibrio del sistema sono i punti critici dell'energia potenziale, ossia gli $x$ tali che $V'(x) = x^3 + \alpha x = x\,(x^2 + \alpha) = 0$.

- se $\alpha > 0$ abbiamo un unico punto di equilibrio: $x_0 = 0$
- se $\alpha < 0$ abbiamo tre punti di equilibrio: $x_1 = 0, x_{2,3} = \pm\sqrt{-\alpha}$

2. La stabilità si determina calcolando la derivata seconda dell'energia potenziale nei punti di equilibrio (per i punti stabili si veda la spiegazione al punto 2 della soluzione b es 2 )

- se $\alpha > 0$ il punto $x_0 = 0$ è un punto di equilibrio stabile, infatti

$$V''(x) = 3x^2 + \alpha|_{x=0} = \alpha > 0$$

e quindi $x_0 = 0$ è un punto di minimo del potenziale.

- se $\alpha < 0$ (a) il punto $x_1 = 0$ e un punto di equilibrio instabile, infatti

$$V''(x) = 3x^2 + \alpha|_{x=0} = \alpha < 0$$

e quindi $x_1 = 0$ è un punto di massimo del potenziale. (b) i punti $x_{2,3} = \pm\sqrt{-\alpha}$ sono due punti di equilibrio stabile, infatti

$$V''(x) = 3x^2 + \alpha|_{x=\pm\sqrt{-\alpha}} = -3\alpha + \alpha = -2\alpha > 0$$

e quindi $x_{2,3} = \pm\sqrt{-\alpha}$ sono due punti di minimo del potenziale.

3. L'energia del sistema è $E := \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{x^4}{4} + \alpha\frac{x^2}{2}$
4. E è una costante del moto, infatti

$$\dot{E} = \dot{x}\left(\ddot{x} + x^3 + \alpha x\right) = \dot{x}\left(-V'(x) + +x^3 + \alpha x\right) = \dot{x}\left(-x^3 - \alpha x + x^3 + \alpha x\right) = 0$$