Elisabetta Colantoni e Giulia Degni
FM-210 Meccanica Analitica
22 marzo 2022

Tutorato IV

Question 1. Si considerino due punti materiali P_1 e P_2 di massa $m_1 = m_2 = 2$ che interagiscono attraverso forze centrali. In particolare, se $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$ sono le coordinate dei punti P_1 e P_2, rispettivamente, le forze che agiscono su P_1 e P_2 sono, rispettivamente,

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2}{|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|} F\left(|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|\right), \quad \mathbf{F}_2 = -\frac{\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2}{|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|} F\left(|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|\right)$$

dove

$$F(\rho) = -\frac{dV}{d\rho}(\rho), \quad V(\rho) = \frac{\rho^2}{2} + 2\log\rho$$

1. Si descriva il moto dei due punti nel sistema del centro di massa, in modo da ricondursi a un sistema che si muove in un campo centrale, e si mostri che il sistema che quest'ultimo è un sistema due gradi di libertà, descrivibile attraverso le variabili polari (ρ, θ)
2. Si studi il moto della variabile $\rho(t)$ al variare del momento angolare; in particolare, si determinino i punti di equilibrio, se ne discuta la stabilità e si individuino le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$
3. Si scriva la legge di variazione di $\theta(t)$ in funzione di $\rho(t)$.

Question 2. Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = -\frac{1}{4}\rho^4 + 2\rho$$

1. Scrivere le equazioni di Newton e il sistema dinamico associato.
2. Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
3. Studiare qualitativamente il grafico del potenziale efficace.
4. Analizzare qualitativamente il moto nel piano $(\rho, \dot{\rho})$
5. Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$

Question 3. Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \log\rho - \frac{\alpha}{4\rho^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Si risponda alle domande seguenti al variare del parametro α e del modulo L del momento angolare.

1. Si scriva l'equazione del moto e il sistema dinamico associato.
2. Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
3. Studiare qualitativamente il grafico del potenziale efficace.
4. Analizzare qualitativamente il moto nel piano $(\rho, \dot{\rho})$
5. Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$
6. Si discutano le condizioni sotto le quali in generale il moto complessivo del sistema è periodico

Question 4. In classe avete visto che se $L \neq 0$, l'orbita su cui si svolge il moto in un campo centrale è data dall'equazione

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \pm\frac{\mu\rho^2}{L}\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V_{eff}\right)},$$

che prende il nome di prima forma dell'equazione delle orbite. Ora, verificate che, posto $u = 1/\rho$, tale equazione si può riscrivere come

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{\mu}{L^2}\frac{d}{du}\left[V\left(\frac{1}{u}\right)\right]$$

che prende il nome di seconda forma dell'equazione delle orbite.