Elisabetta Colantoni e Giulia Degni
FM-210 Meccanica Analitica
22 Marzo 2022

Tutorato IV

Question 1. Sia dato il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto alla forza di energia potenziale

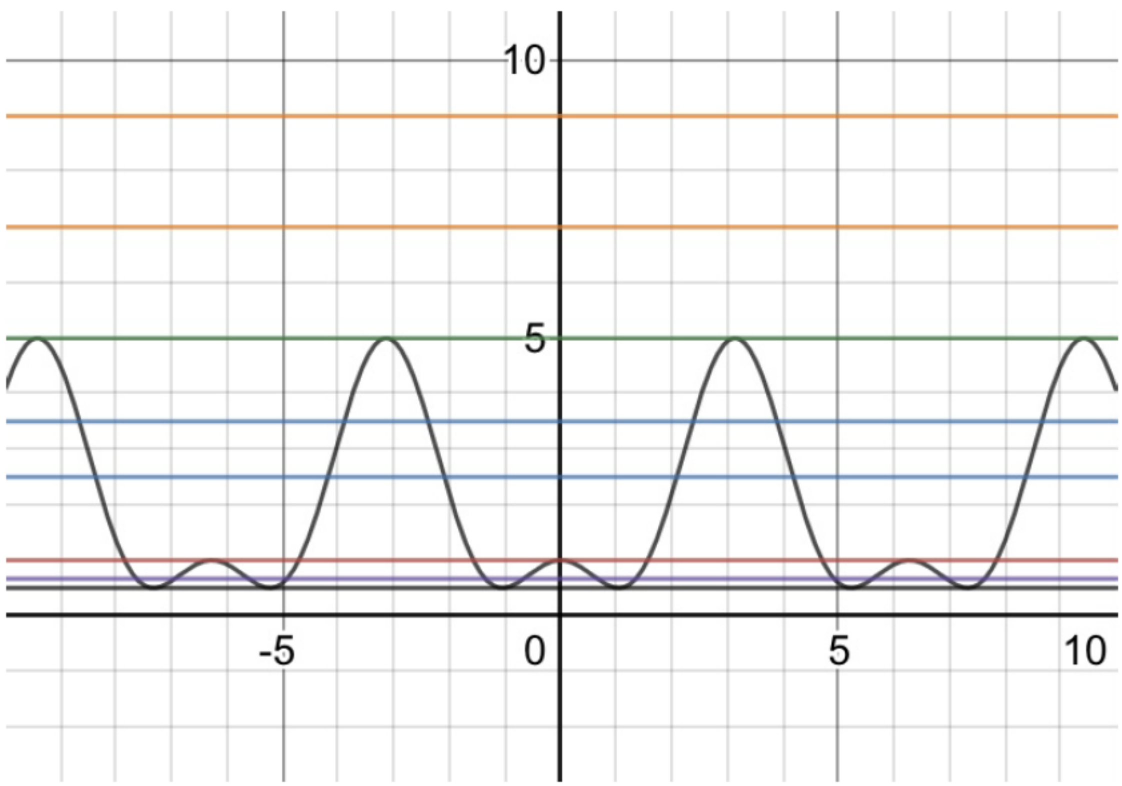
$$V(x) = 2(1 - \cos x) + \cos(2x), \quad x \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi$$

1. Si studi la funzione $V(x)$.
2. Si studino le curve di livello dell'energia del corrispondente sistema dinamico.
3. Si dimostri che la traiettoria con dato iniziale $(x, \dot{x}) = \left(-\frac{2\pi}{3}, 0\right)$ è periodica e se ne scriva il periodo della traiettoria del punto come integrale definito.

1. Innanzitutto osserviamo che V è una funzione periodica di periodo 2π ed è pari.

$$V'(x) = 2\sin x - 2\sin 2x$$

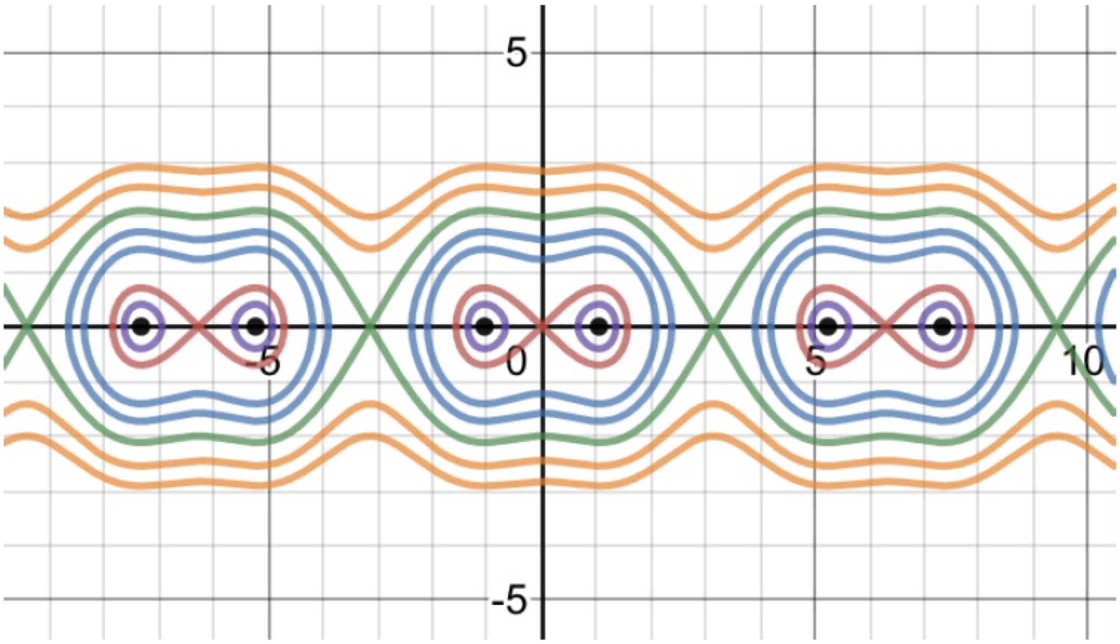
La derivata del potenziale si annulla nei punti $x_{0,k} = k\pi, x_{1,k} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ e $x_{2,k} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$. I punti $x_{0,k}$ sono massimi del potenziale mentre i punti $x_{1,k}$ e $x_{2,k}$ sono minimi del potenziale e pertanto i punti $(x_{0,k}, 0)$ sono punti di equilibrio instabili e i punti $(x_{1,k}, 0)$ e $(x_{2,k}, 0)$ punti di equilibrio stabili.



2. Dividiamo nei soliti casi al variare dell'energia e dei dati iniziali.

- Se $E = \frac{1}{2}$ e $x(0) = x_{1,k} \circ x(0) = x_{2,k}$ il moto è fisso sul punto di equilibrio stabile.
- Se $\frac{1}{2} < E < 1$ e $x(0) \in \left[2k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$ il moto è chiuso periodico attorno al punto di equilibrio $(x_{1,k}, 0)$ e se $x(0) \in \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, -2k\pi\right]$ il moto è chiuso periodico attorno al punto di equilibrio $(x_{2,k}, 0)$.
- Se $E = 1$ e $x(0) = x_{0,2k}$ il moto è fisso sul punto di equilibrio instabile e se $x(0) \in \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$ il moto è limitato aperiodico e asintotico al punto $(x_{0,2k}, 0)$
- Se $1 < E < 5$ e $x(0) \in (-k\pi, k\pi)$ il moto è chiuso periodico attorno ai punti $(x_{1,k}, 0)$ e $(x_{2,k}, 0)$.

- Se $E=5$ e $x(0)=x_{0,2k+1}$ il moto è fisso sul punto di equilibrio instabile e se $x(0)\in(-k\pi,k\pi)$ il moto è limitato aperiodico e asintotico ai punti $(x_{0,2k-1},0)$ e $(x_{0,2k+1},0)$.
- Se $E>5$ allora il moto è aperto e periodico.



3. $E(x,y)=\frac{1}{2}y^2+V(x)$. $E\left(-\frac{2\pi}{3},0\right)=\frac{5}{2}$ e per tale valore dell'energia, dall'analisi fatta al punto precedente, sappiamo che il moto è periodico.

$$T=\sqrt{2}\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{2}-V(x)}}$$

Question 2. Si considerino due punti materiali P_1 e P_2 di massa $m_1=m_2=2$ che interagiscono attraverso forze centrali. In particolare, se $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$ sono le coordinate dei punti P_1 e P_2, rispettivamente, le forze che agiscono su P_1 e P_2 sono, rispettivamente,

$$\mathbf{F}_1=\frac{\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2}{|\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2|}F\left(|\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2|\right),\quad \mathbf{F}_2=-\frac{\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2}{|\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2|}F\left(|\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2|\right)$$

dove

$$F(\rho)=-\frac{dV}{d\rho}(\rho),\quad V(\rho)=\frac{\rho^2}{2}+2\log\rho$$

1. Si descriva il moto dei due punti nel sistema del centro di massa, in modo da ricondursi a un sistema che si muove in un campo centrale, e si mostri che quest'ultimo è un sistema due gradi di libertà, descrivibile attraverso le variabili polari (ρ,θ)
2. Si studi il moto della variabile $\rho(t)$ al variare del momento angolare; in particolare, si determinino i punti di equilibrio, se ne discuta la stabilità e si individuino le traiettorie periodiche nel piano $(\rho,\dot\rho)$
3. Si scriva la legge di variazione di $\theta(t)$ in funzione di $\rho(t)$.

1) Scriviamo innanzitutto le leggi del moto:

$$\begin{cases} 2\ddot{\mathbf{x}}_1=\frac{\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2}{|\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2|}F\left(|\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2|\right)\\ 2\ddot{\mathbf{x}}_2=-\frac{\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2}{|\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2|}F\left(|\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2|\right)\end{cases}$$

Sommandole e sottraendole otteniamo rispettivamente:

$$\begin{cases} \ddot{\mathrm{x}}_1-\ddot{\mathrm{x}}_2=\frac{\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_2}{|\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2|}F\left(|\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2|\right)\\ \ddot{\mathrm{x}}_1+\ddot{x}_2=0\end{cases}$$

Definendo quindi il cambio di variabili

$$\begin{cases} \mathbf{R} = \frac{2\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2}{4} = \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2} \\ r = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \end{cases}$$

le equazioni del moto diventano

$$\begin{cases} 4\ddot{\mathbf{R}} = 0 \\ \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} F(|\mathbf{r}|) \end{cases}$$

Quindi la prima descrive un punto materiale di massa $M = m_1 + m_2 = 4$ che si muove di moto rettilineo uniforme (non essendo soggetto a forze), mentre la seconda si può interpretare come equazione del moto di un punto materiale di massa $\mu = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = 1$ (che prende il nome di massa ridotta) sottoposta a una forza centrale. Come sappiamo dalla teoria, la seconda equazione che a priori è tridimensionale è in realtà un sistema a due gradi di libertà. Scegliendo un sistema di coordinate in cuil l'asse z è diretto lungo la direzione del vettore momento angolare, si ha $r = (r_1, r_2, 0)$. Possiamo allora introdurre coordinate polari $\rho \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$, ponendo $(r_1, r_2) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$, ed esprimere il modulo del momento angolare in tali coordinate ed ottenere: $\mathbf{L} = (0, 0, L)$ con $L = \mu\rho^2\dot{\theta} = \rho^2\dot{\theta}$. A questo punto possiamo finalmente riscrivere le equazioni del moto in funzione delle sole variabili (ρ, θ) :

$$\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}}{d\rho} \quad \text{con} \quad V_{eff} = V(\rho) + \frac{L^2}{2\rho^2} \quad L \neq 0$$

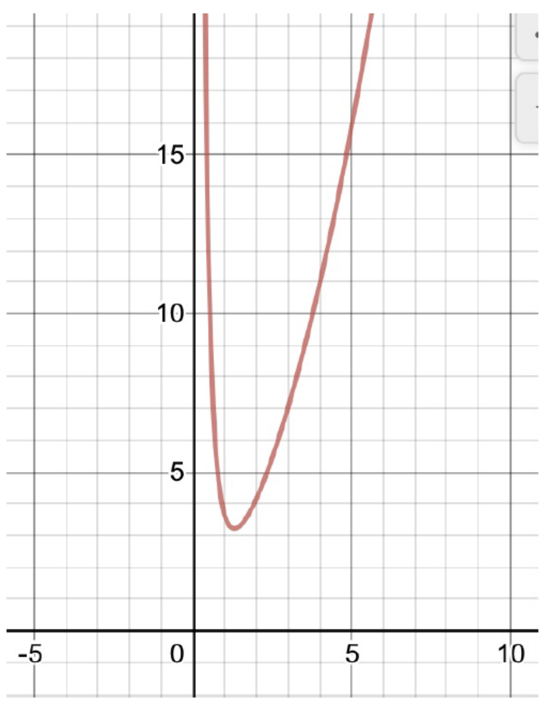
2 .

$$V_{eff} = \frac{\rho^2}{2} + 2\log\rho + \frac{L^2}{2\rho^2}$$

e il sistema dinamico associato è

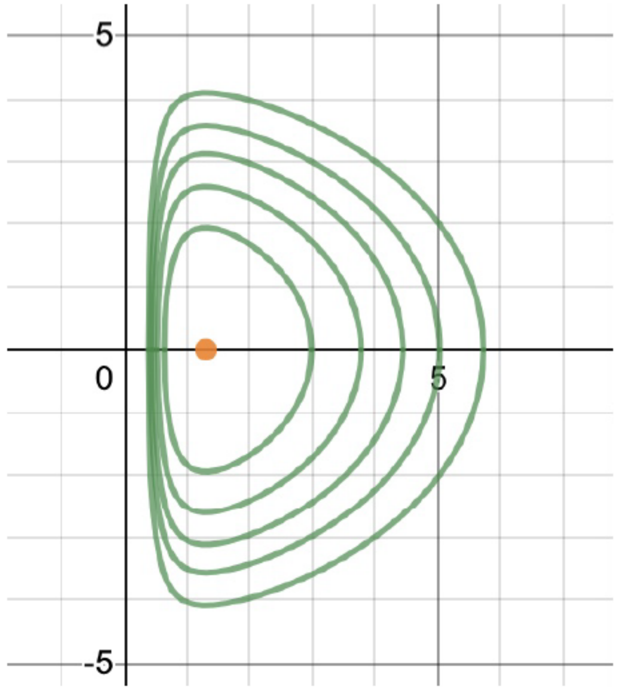
$$\begin{cases} \dot{\rho} = y \\ \dot{y} - \frac{dV_{eff}}{d\rho} = -\rho - \frac{2}{\rho} + \frac{L^2}{\rho^3} \end{cases}$$

L'unico punto stazionario del potenziale efficace è $\rho_0 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + L^2}}$ che è minimo per ogni valore non nullo di L pertanto il punto $(\rho_0, 0)$ è un punto di equilibrio stabile per ogni valore non nullo di L.



- Se $E = V_{eff}(\rho_0)$ e $\rho(0) = \rho_0$ allora moto fisso.

- Se $E > V_{\text{eff}}\left(\rho_0\right)$ allora moto chiuso periodico.



3) Poiché $\dot{\theta} = \frac{L}{\rho^2}$ allora

$$\theta(t) = \theta\left(t_0\right) + \int_{t_0}^{t} \frac{L}{\rho^2(s)} ds$$

Question 3. Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \log \rho - \frac{\alpha}{4\rho^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Si risponda alle domande seguenti al variare del parametro α e del modulo L del momento angolare.
1. Si scriva l'equazione del moto e il sistema dinamico associato.
2. Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
3. Studiare il grafico del potenziale efficace.
4. Analizzare qualitativamente il moto nel piano $(\rho, \dot{\rho})$
5. Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$
6. Si discutano le condizioni sotto le quali in generale il moto complessivo del sistema è periodico

1) Poichè $m = 1$ il potenziale efficace è dato da

$$V_{eff}(\rho) = \log \rho - \frac{\alpha}{4\rho^2} + \frac{L^2}{2\rho^2} = \log \rho + \frac{\beta}{2\rho^2}, \quad \beta = L^2 - \frac{\alpha}{2}$$

e quindi l'equazione di Newton è

$$\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}}{d\rho} = -\frac{1}{\rho} + \frac{\beta}{\rho^3}$$

Il sistema dinamico associato è quindi $\begin{cases} \dot{\rho} = y \\ \dot{y} = -\frac{dV_{eff}}{d\rho} = -\frac{1}{\rho} + \frac{\beta}{\rho^3} \end{cases}$

2) Sappiamo che i punti in cui si annulla il campo vettoriale sono tutti e soli i punti della forma $(\rho_0, 0)$ con ρ_0 punto critico del potenziale efficace; pertanto risolvendo l'equazione $V'_{\text{eff}}(\rho) = 0$ vediamo che questa ha soluzione se e solo se $\beta > 0$. In particolare avremo quindi:

- Per $\beta > 0$ un solo punto di equilibrio $P_0 = (\sqrt{\beta}, 0)$
- Per $\beta \leq 0$ nessun punto di equilibrio Derivando ulteriormente il potenziale efficace otteniamo

$$\frac{d^2V_{eff}}{d\rho^2} = -\frac{1}{\rho^2} + \frac{3\beta}{\rho^4}$$

quindi se $\beta > 0$ avremo che $\frac{d^2V_{eff}}{d\rho^2}(\rho_0) = \frac{2}{\beta} > 0$, cioè P_0 è un punto di equilibrio instabile.

3) Indipendentemente dal valore di L si ha

$$\lim_{\rho\to+\infty} V_{eff}(\rho) = +\infty$$

E inoltre si ha

$$\lim_{\rho\to 0^+} V_{eff}(\rho) = \pm\infty$$

dove il segno dipende dal segno di L

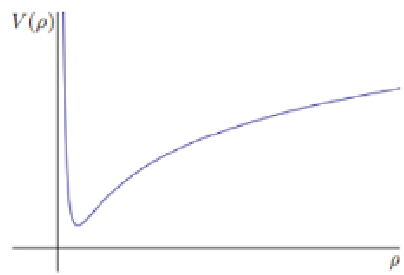


Figura 7: Grafico qualitativo del potenziale efficace per $\beta > 0$

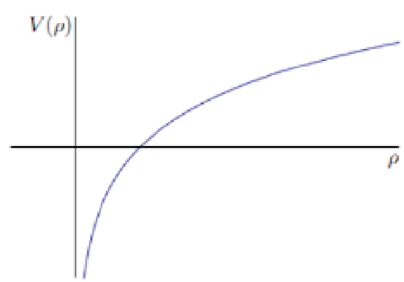


Figura 8: Grafico qualitativo del potenziale efficace per $\beta \leq 0$

4) Da $E = y^2/2 + V_{eff}(\rho)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2\left(E - V_{eff}(\rho)\right)}$. Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse ρ. Suddividiamo il problema in due casi.

Caso 1 Se $\beta \leq 0$ per ogni valore di energia avremo una traiettoria aperta con $\lim_{\rho\to 0^+} y(\rho) = \pm\infty$

Caso 2 Se $\beta > 0$:

- Per $E = V_{eff}(\rho_0)$ avremo il punto di equilibrio stabile P_0
- Per $E > V_{eff}(\rho_0)$ avremo traiettorie chiuse attorno al punto di equilibrio P_0

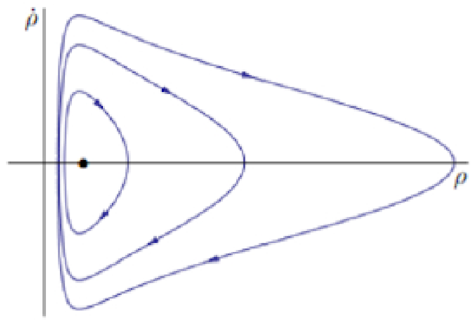


Figura 9: Piano delle fasi per $\beta > 0$

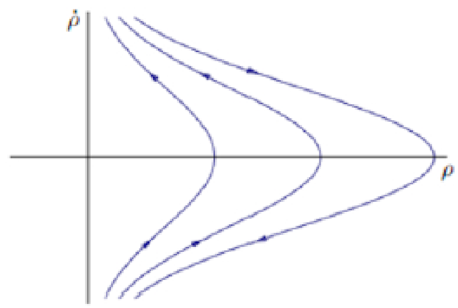


Figura 10: Piano delle fasi per $\beta \leq 0$

5) Alla luce di quanto visto al punto precedente si hanno traiettorie periodiche solo nel caso $\beta > 0$ e $E > V_{\text{eff}}\ (\rho_0)$.
6) Un caso in cuil il moto complessivo è sicuramente periodico è quello in cui la variabile radiale si muove di moto banale, cioè, $\rho(t) \equiv$ cost., che è un caso che si verifica per $\beta > 0$ e dato iniziale corrispondente al punto di equilibrio P_0. In questo caso $\rho(t) \equiv \sqrt{\beta}$ mentre θ si muove di moto rettilineo uniforme:

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{L}{m\rho_{eq}^2}t = \theta_0 + \frac{L}{\beta}t$$

che corrisponde a un moto complessivo circolare uniforme di periodo

$$T = \frac{2\pi m\rho_{eq}^2}{L} = \frac{2\pi\beta}{L}$$

Se invece il moto radiale è periodico non banale di periodo T_0, la condizione necessaria affinché il moto complessivo sia periodico è che l'incremento della variabile angolare in un periodo $T_0, \Delta\theta = \omega_1 T_0$ con

$$\omega_1 = \frac{2}{T_0} = 2\int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{L}{m\rho^2}\frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{\text{eff}}\left(\rho\right)\right)}} = 2\int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{L}{\rho^2}\frac{d\rho}{\sqrt{2\left(E - \log\rho - \frac{\beta}{2\rho^2}\right)}}$$

sia multiplo razionale di 2π (dove $\rho_\pm$sono le soluzioni di $E = V_{eff}(\rho)$) In caso contrario il moto complessivo è quasi-periodico e riempie densamente una regione bidimensionale dello spazio (sia dello spazio fisico che dello spazio delle fasi).

Question 4. In classe avete visto che se $L \neq 0$, l'orbita su cui si svolge il moto in un campo centrale è data dall'equazione

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \pm \frac{\mu\rho^2}{L}\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V_{eff}\right)},$$

che prende il nome di prima forma dell'equazione delle orbite. Ora, verificate che, posto $u = 1/\rho$, tale equazione si può riscrivere come

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{\mu}{L^2}\frac{d}{du}\left[V\left(\frac{1}{u}\right)\right]$$

che prende il nome di seconda forma dell'equazione delle orbite.

Poniamo $u = 1/\rho$ e ricordiamo $\dot{\theta} = L\left(\mu\rho^2\right)^{-1} = Lu^2/\mu$.

Poiché le funzioni $\theta = \theta(t)$ e $u = u(\rho)$ sono invertibili, abbiamo

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta}\left[u^2\left(\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\right)\right] = -\frac{d}{d\theta}\left[u^2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)\right] = -\frac{\mu}{L}\frac{d}{d\theta}\left[\dot{\theta}\frac{d\rho}{d\theta}\right] =$$

$$-\frac{\mu}{L}\frac{d}{d\theta}\left[\frac{d\theta}{dt}\frac{d\rho}{d\theta}\right] = -\frac{\mu}{L}\frac{d}{d\theta}\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\mu}{L}\frac{dt}{d\theta}\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{\mu}{L\dot{\theta}}\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{\mu^2}{L^2u^2}\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{\mu^2}{L^2u^2}\ddot{\rho}.$$

Allora, utilizzando l'identità

$$\frac{dV_{eff}}{d\rho} = \frac{dV_{eff}}{du}\frac{du}{d\rho} = -u^2\frac{dV_{eff}}{du}$$

possiamo scrivere l'equazione radiale $\mu\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}}{d\rho}(\rho)$ nella forma

$$\frac{L^2u^2}{\mu}\frac{d^2u}{d\theta^2} = \mu\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}}{d\rho}(\rho) = u^2\frac{dV_{eff}}{du}$$

che implica

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{\mu}{L^2}\frac{d}{du}\left[V\left(\frac{1}{u}\right)\right]$$