Elisabetta Colantoni e Giulia Degni
FM-210 Meccanica Analitica
1 marzo 2022

Tutorato I

Question 1. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}, \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Si calcolino gli autovalori e gli autovettori.
2) Si determini la natura del punto di equilibrio.
3) Scrivere la soluzione generale del sistema.
4) Risolvere lo stesso sistema per B.

Soluzione 1. L'integrale generale del sistema lineare è dato da: $\vec{x}(t) = e^{A(t)}\vec{x}(0)$. Il polinomio caratteristico della matrice A è:

$$p_C(t) = t^2 - 2t - 15$$

Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 5$ e risolvendo per i=1,2

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda_i & 2 \\ 6 & -1-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

otteniamo gli autovettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Siccome gli autovalori hanno segno opposto, l'origine è un punto di sella. (Si ricordi che se gli autovalori sono concordi l'origine è detta *sorgente*, se gli autovalori sono discordi l'origine è detta *punto di sella*.)

3. Abbiamo $A = PDP^{-1}$ con P invertibile e D diagonale:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Quindi $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} = PDP^{-1}\vec{x}$ da cui segue $P^{-1}\dot{\vec{x}} = DP^{-1}\vec{x}$. Se $P^{-1}\vec{x} = (u, v)$, allora

$$\begin{cases} \dot{u} = -3u \\ \dot{v} = 5v \end{cases}$$

e quindi $u(t) = e^{\lambda_1 t}u(0), v(t) = e^{\lambda_2 t}v(0)$ pertanto

$$\vec{x}(t) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1}\vec{x}(0)$$

Quindi

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{4}[(e^{-3t} + 3e^{5t})x_1(0) + (-e^{-3t} + e^{5t})x_2(0)] \\ x_2(t) = \frac{1}{4}[-3(e^{-3t} - e^{5t})x_1(0) + (3e^{-3t} + e^{5t})x_2(0)] \end{cases}$$

4. Si svolge come precedentemente fatto. Gli autovalori hanno lo stesso segno e quindi l'origine è una sorgente. Gli autovettori sono:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalizziamo la matrice:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

E otteniamo:

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2}[(e^{3t} + 3e^t)x_1(0) + (-e^{-3t} + e^t)x_2(0)] \\ x_2(t) = \frac{1}{2}[(-e^{3t} + e^t)x_1(0) + (e^{3t} + e^t)x_2(0)] \end{cases}$$

Question 2. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}, \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Se ne trovi la soluzione al variare del dato iniziale

Soluzione Per prima cosa si calcolano gli autovalori: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$. Gli autovettori associati sono: $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (-2, -3, 1)$, $v_3 = (1, 3, 1)$. Abbiamo $A = PDP^{-1}$ con P invertibile e D diagonale:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \tfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Se $P^{-1}\vec{x} = (u, v, w)$, procedendo come nell'esercizio precedente, otteniamo:

$$\vec{x}(t) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix} P^{-1}\vec{x}(0)$$

Quindi la soluzione del sistema iniziale sarà data da

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{12}[(6e^t + 8e^{2t} - 2e^{5t})x_1(0) + (-3e^t + 3e^{5t})x_2(0) + (3e^t - 8e^{2t} - 5e^{5t})x_3(0)] \\ x_2(t) = \frac{1}{12}[(-6e^t + 12e^{2t} - 6e^{5t})x_1(0) + (3e^t - 9e^{5t})x_2(0) + (-3e^t - 12e^{2t} - 15e^{5t})x_3(0)] \\ x_3(t) = \frac{1}{12}[(6e^t - 4e^{2t} - 2e^{5t})x_1(0) + (-3e^t + 3e^{5t})x_2(0) + (3e^t + 4e^{2t} + 5e^{5t})x_3(0)] \end{cases}$$

Question 3. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}, \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

con condizioni iniziali generiche $x(0) = x_0$. Se ne trovi la soluzione al variare del parametro α.

Soluzione Se $\alpha = 0$ possiamo scrivere:

$$A = I + N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$e^{At} = e^{It}(It+N) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{pmatrix}$$

Quindi la soluzione sarà:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(0)e^t \\ x_1(0)te^t + x_2(0)e^t \end{pmatrix}$$

Se $\alpha \neq 0$ dal polinomio caratteristico si ricava che lo spettro dell'operatore è: $\rho(A) = [1+\sqrt{\alpha}, 1-\sqrt{\alpha}]$. Consideriamo il caso $\alpha > 0$ poniamo $\omega = \sqrt{\alpha}$ e calcoliamo gli autospazi. Una base di autovettori è data da $u = (\omega, 1)$, $v = (-\omega, 2)$ e quindi:

$$D = \begin{pmatrix} 1+\omega & 0 \\ 0 & 1-\omega \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \omega & -\omega \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\omega} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2\omega} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

E dunque la soluzione sarà:

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^t}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right)x_1(0) + \frac{\omega e^t}{2}\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right)x_2(0) \\ \frac{e^t}{2}\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right)x_1(0) + \frac{e^t}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right)x_2(0) \end{pmatrix}$$

Infine nel caso $\alpha < 0$ se poniamo $\omega = i\sqrt{|\alpha|}$ possiamo procedere esattamente come nel caso $\alpha > 0$; la soluzione sarà però espressa in termini di numeri complessi. D'altra parte notiamo che

$$\frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} = \cos\sqrt{|\alpha|}t \quad \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2i} = \sin\sqrt{|\alpha|}t$$

e quindi

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^t\cos\sqrt{|\alpha|}tx_{01} - \sqrt{|\alpha|}e^t\sin\sqrt{|\alpha|}tx_{02} \\ \frac{e^t}{\sqrt{|\alpha|}}\sin\sqrt{|\alpha|}tx_{01} + e^t\cos\sqrt{|\alpha|}tx_{02} \end{pmatrix}$$

Question 4. Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy \\ \dot{y} = -y^2 + (2e^{-x}-1)^2 - 4xe^{-x}(2e^{-x}-1) \end{cases}$$

Si verifichi che la funzione $H(x,y) = x(y^2 - (2e^{-x}-1)^2)$ è una costante del moto.

Soluzione Basta derivare H rispetto al tempo

$$\frac{dH(x(t),y(t))}{dt} = \dot{x}\left(y^2 - \left(2e^{-x}-1\right)^2\right) + x\left(2y\dot{y} + 4\left(2e^{-x}-1\right)\dot{x}e^{-x}\right)$$

Sostituire $\dot{x}$ e $\dot{y}$ con le due equazioni e osservare che il risultato è 0 .

Question 5. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B \\ x(0) = 0 \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Soluzione. L'integrale generale del sistema lineare $X' = AX + B$ è dato da

$$X(t) = e^{At}\left(\int e^{-At}B(t)dt\right)$$

dove e^{At} e e^{-At} sono rispettivamente le matrici esponenziali di At e $-At$ Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2$. Gli autovettori associati sono $v_1 = (1,1)$ e $v_2 = (1,-4)$ rispettivamente. Nuovamente, otteniamo:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Allora la matrice esponenziale e^{At} è

$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{5}e^{3t} + \frac{1}{5}e^{-2t} & \frac{1}{5}e^{3t} - \frac{1}{5}e^{-2t} \\ \frac{4}{5}e^{3t} - \frac{4}{5}e^{-2t} & \frac{1}{5}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{-2t} \end{pmatrix}$$

e la matrice esponenziale e^{-At} è

$$e^{-At} = e^{A(-t)} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t} & \frac{1}{5}e^{-3t} - \frac{1}{5}e^{2t} \\ \frac{4}{5}e^{-3t} - \frac{4}{5}e^{2t} & \frac{1}{5}e^{-3t} + \frac{4}{5}e^{2t} \end{pmatrix}$$

Si ha che

$$e^{-At}B(t) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t} & \frac{1}{5}e^{-3t} - \frac{1}{5}e^{2t} \\ \frac{4}{5}e^{-3t} - \frac{4}{5}e^{2t} & \frac{1}{5}e^{-3t} + \frac{4}{5}e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}e^{-5t} + \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5}e^{-5t} - \frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

Allora

$$\int e^{-At}B(t)dt = \int \begin{pmatrix} \frac{3}{5}e^{-5t} + \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5}e^{-5t} - \frac{8}{5} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} -\frac{3}{25}e^{-5t} + \frac{2}{5}t + c_1 \\ -\frac{3}{25}e^{-5t} - \frac{8}{5}t + c_2 \end{pmatrix}, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Allora l'integrale generale è

$$X(t) = e^{At}\left(\int e^{-At}B(t)dt\right) =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{5}e^{3t} + \frac{1}{5}e^{-2t} & \frac{1}{5}e^{3t} - \frac{1}{5}e^{-2t} \\ \frac{4}{5}e^{3t} - \frac{4}{5}e^{-2t} & \frac{1}{5}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{3}{25}e^{-5t} + \frac{2}{5}t + c_1 \\ -\frac{3}{25}e^{-5t} - \frac{8}{5}t + c_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{4}{5}c_1 + \frac{1}{5}c_2\right)e^{3t} + \left(\frac{1}{5}c_1 - \frac{1}{5}c_2 - \frac{3}{25} + \frac{2}{5}t\right)e^{-2t} \\ \left(\frac{4}{5}c_1 + \frac{1}{5}c_2\right)e^{3t} + \left(-\frac{4}{5}c_1 + \frac{4}{5}c_2 - \frac{3}{25} - \frac{8}{5}t\right)e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale $X(0) = 0$ si ha $c_1 = c_2 = \frac{3}{25}$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$X(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{25}e^{3t} + \left(\frac{2}{5}t - \frac{3}{25}\right)e^{-2t} \\ \frac{3}{25}e^{3t} - \left(\frac{8}{5}t + \frac{3}{25}\right)e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Question 6. Si consideri la forza posizionale

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

definita come segue:

$$\begin{pmatrix} kx_1 cos^2(ax_3) \\ kx_2 cos^2(ax_3) \\ -\frac{ak}{2}(x_1^2 + x_2^2) sin(2ax_3) \end{pmatrix}$$

dove k ed a sono parametri positivi. Si stabilisca se $\mathbf{F}$ è conservativa e, in caso, si determini l'energia potenziale corrispondente.

Soluzione Si noti che $\mathbb{R}^3$ è uno spazio semplicemente connesso quindi la condizione necessaria perché F sia conservativa (derivate in croce uguali a due a due) è anche una condizione sufficiente. Calcoliamo quindi le derivate incrociate:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_3} = -2akx_1 \cos(ax_3) \sin(ax_3) = -akx_1 (2ax_3) = \frac{\partial F_3}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_3} = -2akx_1 \cos(ax_3) \sin(ax_3) = -akx_1 (2ax_3) = \frac{\partial F_3}{\partial x_2}$$

Quindi $\mathbf{F}$ è conservativa. Determiniamo ora l'energia potenziale: $-\frac{\partial U}{\partial x_1} = F_1 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = -kx_1 \cos^2(ax_3) \Rightarrow$

$U(x_1, x_2, x_3) = -k\frac{x_1^2}{2} \cos^2(ax_3) + c(x_2, x_3)$ Dove $c(x_2, x_3)$ indica una funzione dipendente solo dalle variabili x_2 e x_3. Calcoliamoci esplicitamente $c(x_2, x_3)$:

$$-\frac{\partial U}{\partial x_2} = F_2 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{\partial c(x_2, x_3)}{\partial x_2} = -F_2 = -kx_2 \cos^2(ax_3)$$

$$\Rightarrow c(x_2, x_3) = -k\frac{x_2^2}{2} \cos^2(ax_3) + b(x_3)$$

Dove $b(x_3)$ indica una funzione dipendente solo dalla variabile x_3. Calcoliamoci esplicitamente $b(x_3)$:

$$-\frac{\partial U}{\partial x_3} = F_3 \Rightarrow -\frac{\partial U}{\partial x_3} = -\frac{ak}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) \sin(2ax_3) + b'(x_3) = F_3 = -ak\frac{(x_1^2 + x_2^2)}{2} \sin(2ax_3)$$

$$\Rightarrow b'(x_3) = 0 \Rightarrow b(x_3) = \cos t$$

$$U(x_1, x_2, x_3) = -k\frac{(x_1^2 + x_2^2)}{2} \cos^2(ax_3)$$

Question 7. Sia $\Phi(t, x)$ il flusso di un sistema autonomo del primo ordine e T il periodo di una traiettoria.

1) Dimostrare che la definizione di periodo non dipende dal punto sulla traiettoria, ovvero che ogni punto dell'orbita ha lo stesso periodo.
2) Dimostrare che $\Phi(t + nT, x) = \Phi(t, x)\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Soluzione 1. Si usino le proprietà di gruppo della soluzione $\Phi(t, x)$.
Se esiste $T > 0$ tale che $\Phi(t + T, x) = \Phi(t, x) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ e $y = \Phi(\bar{t}, x)$ si ha allora $\Phi(t + T, y) = \Phi(t + T, \Phi(\bar{t}, x)) = \Phi(t + T - \bar{t}, x) = \Phi(t - \bar{t}, x) = \Phi(t, \Phi(\bar{t}, x)) = \Phi(t, y)$ cioè $\Phi(t + T, y) = \Phi(t, y) \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Quindi il periodo T non dipende dal punto della traiettoria.

2. Per induzione su $n > 2$. Se $n = 2 \Rightarrow \Phi(t + 2T, x) = \Phi(t + T + T, x) = \Phi(T, \Phi(t + T, x)) = \Phi(T, \Phi(t, x)) = \Phi(t + T, x) = \Phi(t, x)$.

Suppongo ora che il claim sia vero per $n > 1$ e lo dimostro per $n + 1$:

$$\Phi(t+(n+1)T,x) = \Phi(t+nT+T,x) = \Phi(nT,\Phi(t+T,x)) = \Phi(nT,\Phi(t,x)) = \Phi(t+nT,x) = \Phi(t,x).$$

Question 8. Sia S l'insieme delle soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + ... + a_1\dot{x} + a_0 x = f(t) \\ x(0) = x_{1,0} \\ \dot{x}(0) = x_{2,0} \\ ... \\ x^{(n-1)}(0) = x_{n-1,0} \end{cases}$$

al variare dei dati iniziali, e sia S_0 l'insieme delle soluzioni del problema omogeneo associato.

1) Dimostrare che S_0 è uno spazio vettoriale e che S è uno spazio affine su S_0.
2) Dedurre da questo la validità del metodo di variazione delle costanti.

Soluzione Si tratta di una generalizzazione di quanto descritto nel file http: //www. mat. uniroma3.it/users/gentile/FM1/testo/app03.pdf