

## Tutorato VI

**Question 1.** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Si calcolino autovalori e autovettori di  $A$ , e si mostri che  $A$  è diagonalizzabile.
- 2) Si calcoli la matrice  $Q$  che diagonalizza  $A$ , i.e. tale che  $Q A Q^{-1}$  è diagonale.
- 3) Si usi il risultato al punto 2 per calcolare l'esponenziale di  $At$ , per  $t \in \mathbb{R}$
- 4) Si usi il risultato al punto 3 per risolvere il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + z \\ \dot{y} = 2x \\ \dot{z} = x + y + z \end{cases}$$

con condizioni iniziali  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (1, 0, -1)$ .

**Question 2.** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale costituito da un punto materiale di massa  $m = 2$  sottoposto a una forza conservativa di energia potenziale

$$V(x) = 4x^2 - 6x - \log(x^2)$$

- Si scrivano le equazioni del sistema dinamico associato.
- Si determinino i punti d'equilibrio e se ne discuta la stabilità.
- Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema.

**Question 3.** Considera il moto di un punto materiale di massa 1 nella "doppia buca di potenziale"

$$\ddot{x} = x - x^3.$$

- Discuti la stabilità delle posizioni di equilibrio e disegna le orbite nello spazio delle fasi al variare di  $E$ .
- Considera il dato iniziale  $(x_0, \dot{x}_0) = (-1, v)$ ; per quali valori di  $v \in \mathbb{R}$  il punto materiale raggiunge la posizione 1? Con che velocità ci arriva?
- Per  $E = 0$  il moto avviene sulla separatrice. Con che angolo la separatrice interseca gli assi?

**Question 4.** Un punto materiale di massa  $\mu$  è soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \rho^4 \left( \rho^2 + \frac{\alpha}{\rho^2} \right), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sia  $L$  il modulo del momento angolare. Si assuma inizialmente che sia  $L > 0$ .

- 1) Si scrivano le equazioni del moto per la variabile  $\rho$ , e le equazioni del sistema dinamico associato.
- 2) Si studi il grafico dell'energia potenziale efficace al variare di  $\alpha$ .
- 3) Si studi il moto della variabile  $\rho$  al variare di  $\alpha$
- 4) Si discuta in particolare per quali valori di  $\alpha$  si hanno solo moti illimitati o solo moti limitati, e, nel caso di moti limitati, si descriva il moto nel piano ortogonale al momento angolare.
- 5) Si determini, per qualche  $\alpha \in \mathbb{R}$ , un dato iniziale (se esiste) per cui si abbia un moto complessivamente periodico in entrambe le variabili  $\rho$  e  $\theta$ .
- 6) Si discuta come cambia l'analisi qualitativa del moto se  $L = 0$ .

**Question 5.** Dato un sistema di riferimento  $k = Oxyz$  (sistema di riferimento fisso) si consideri un sistema di riferimento mobile  $K = O'\xi\eta\zeta$  la cui origine  $O'$  si muove nel piano  $(x, y)$  lungo il profilo di un'equazione  $y = x^2$  in modo tale che la sua componente lungo l'asse  $x$  del vettore che individua il punto  $O'$  varia secondo la legge oraria  $x_{O'}(t) = \sin t$ . L'asse  $\zeta$  di  $K$  si mantiene parallelo all'asse  $z$  di  $k$  mentre l'asse  $\xi$  di  $K$  si mantiene sempre tangente alla curva  $y = y(x)$ . Un punto materiale  $P$  di massa  $m = 1$  si muove nel sistema  $K$  lungo l'asse  $\xi$  con legge oraria  $\xi(t) = t$ .

- 1) Scrivere la trasformazione rigida  $D : K \rightarrow k$  come composizione di una traslazione con una rotazione  $D = C \circ B$  e determinare la forma di  $C$  e  $B$ .
- 2) Scrivere la soluzione delle equazioni del moto  $\mathbf{q}(t)$  nel sistema  $k$  e  $\mathbf{Q}(t)$  nel sistema  $K$
- 3) Determinare la velocità assoluta  $v$  e la velocità relativa  $v'$ .
- 4) Scrivere la componente traslatoria della velocità di trascinamento  $v_0$
- 5) Scrivere la componente rotatoria della velocità di trascinamento  $v_T$
- 6) Determinare la forza centrifuga che agisce sul punto  $P$
- 7) Determinare la forza di Coriolis che agisce sul punto  $P$
- 8) Dimostrare che la traiettoria  $t \rightarrow \mathbf{q}(t)$  attraversa l'asse  $x$  infinite volte, e calcolare esplicitamente i tempi di attraversamento. [Suggerimento Si ha  $\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$  per  $|x| < \frac{\pi}{2}$ ]