

### Tutorato VII

**Question 1.** Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange per il sistema bidimensionale di Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = q_2 \dot{q}_1 - q_1 \dot{q}_2 - 2q_1 q_2$$

e trovarne esplicitamente la soluzione.

**Question 2.** Si calcolino le reazioni vincolari del pendolo semplice di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$ . In particolare si determinino in corrispondenza di quale configurazione assumono il valore massimo e il valore minimo.

**Question 3.** Si consideri un pendolo costituito da una molla di lunghezza di riposo  $\ell$  sospesa a un punto di sospensione  $O$ , al cui estremo libero è appesa una massa  $m$  (vedi Fig.1). Si scriva la Lagrangiana del sistema usando le coordinate  $x$  e  $\theta$ , dove  $\ell + x$  è la lunghezza della molla e  $\theta$  l'angolo formato con la verticale verso il basso, come in figura. Si determinino le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti.

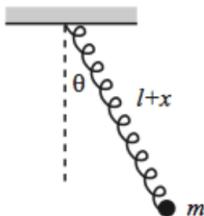


FIGURA 1

**Question 4.** Un sistema meccanico è costituito da tre punti  $P_1, P_2$  e  $Q$ , di masse, rispettivamente  $m_1 = m_2 = m$  e  $m_3 = 2m$ , vincolati su un piano verticale  $\pi$ . I due punti  $P_1$  e  $P_2$  si muovono lungo un asse orizzontale (che si può identificare con l'asse  $x$ ) e sono entrambi collegati a  $Q$  tramite due sbarre rettilinee di lunghezza  $L$  e massa trascurabile. Il punto  $P_1$  è collegato a un punto fisso  $O$  dell'asse lungo cui scorre tramite una molla di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo nulla. Sia  $g$  l'accelerazione di gravità.

- 1) Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange, utilizzando come coordinate lagrangiane l'ascissa  $x$  del punto  $Q$  lungo l'asse orizzontale e l'angolo  $\theta$  che la retta passante per i punti  $P_1$  e  $Q$  forma con tale asse.
- 2) Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
- 3) Per  $k = 0$  si discuta qualitativamente il moto.
- 4) Sempre per  $k = 0$ , partendo dalla configurazione iniziale:

$$x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0 \quad \theta(0) = 0 \quad \dot{\theta}(0) = 0$$

si descriva qualitativamente il moto e si determini la forza vincolare nel punto  $Q$  in funzione del tempo, in particolare quando tale punto si trova a quota  $\frac{L}{\sqrt{2}}$  al di sotto dell'asse  $x$ .

- 5) Si discuta come si modifica la trattazione se entrambe le sbarre hanno massa  $M$  e sono omogenee.

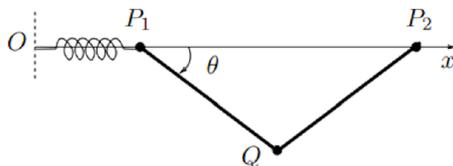


FIGURA 2