Elisabetta Colantoni e Giulia Degni
FM-210 Meccanica Analitica
6 maggio 2022

Tutorato VIII

Question 1. Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) + q_1^2 + q_2^2 - \left(q_1^2 + q_2^2\right)^3$$

1) Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange, e determinare l'energia (generalizzata) E, conservata dalle equazioni del moto.
2) Sfruttando la simmetria della Lagrangiana, dimostrare che esiste un integrale primo distinto da E. Detto I tale integrale primo, si consideri il sistema di Lagrange ristretto sui livelli $I = c$, con $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Si dimostri che tale restrizione è ancora un sistema Lagrangiano, ad un grado di libertà, e si scriva la corrispondente Lagrangiana ridotta.
3) Si studi qualitativamente il moto del sistema unidimensionale associato a tale Lagrangiana ridotta.

Question 2. Consideriamo un sistema meccanico formato da due punti A e B di massa m in cui A è collegato ad un punto fisso O tramite una sbarretta lunga L di massa M e B è collegato ad A tramite una molla di costante elastica $k > 0$ di lunghezza a riposo nulla.

Scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrage. Trovare poi i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.

[Suggerimento: Conviene usare come coordinate lagrangiane l'angolo φ_1 che il punto A forma con la verticale discendente e le coordinate cartesiane (x, y) del punto B.]

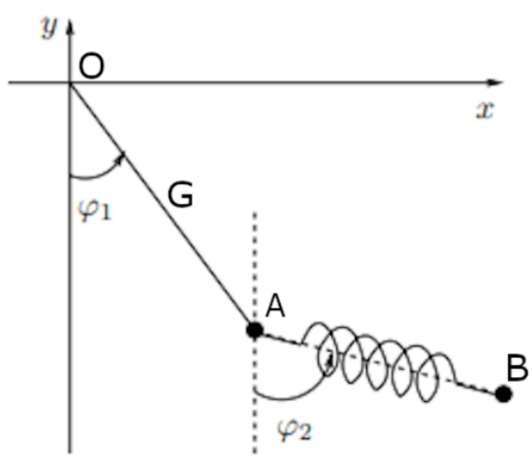

Figura 1

Question 3. Una massa puntiforme m è vincolata a muoversi sotto l'effetto della forza peso sulla superficie di un cono di semiampiezza al vertice $\theta \in (0, \pi/2)$, con asse in direzione verticale e vertice rivolto verso il basso, come in figura.

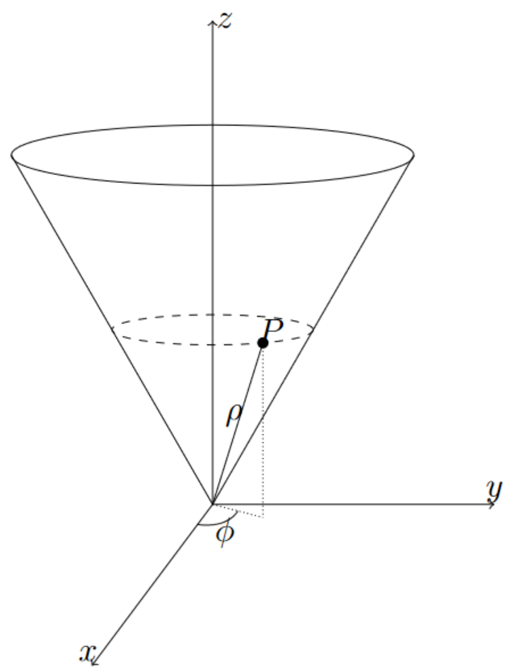

FIGURA 2

1) Si parametrizzi la superficie del vincolo usando coordinate sferiche centrate nel vertice del cono: in altre parole, si scelgano come coordinate parametriche la distanza $\rho > 0$ dal vertice del cono, e l'angolo azimutale φ, come in figura.
2) Si scriva la Lagrangiana $\mathcal{L}$ del sistema, usando come coordinate Lagrangiane le variabili $(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi})$. Si riconosca che φ è una variabile ciclica.
3) Si ricavino le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. Si riconosca che tale sistema di equazioni ammette due grandezze conservate: l'energia meccanica E e il momento coniugato alla variabile ciclica φ, che chiameremo A (Che da qui in poi supporremo non nulla).
4) Usando la conservazione di A, si elimini la dipendenza di $\dot{\varphi}$ nell'espressione di E, e si esprima cosí l'energia meccanica del sistema in funzione di $\rho, \dot{\rho}$ e di A nella forma $E = m\dot{\rho}^2/2 + V_{eff}(\rho)$: qual è l'espressione del potenziale efficace $V_{eff}(\rho)$?
5) Si studi il grafico di V_{eff} e si discuta la natura qualitativa del moto radiale.
6) Si discutano le condizioni per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito.

[Suggerimento: θ è un angolo dato e quindi fisso, non dipendete dal tempo]

Question 4. Si consideri un punto materiale di massa m vincolato a muoversi su una superficie ellissoidale di equazione

$$2\left(x^2 + y^2\right) + z^2 = R^2$$

sottoposto all'azione della gravità e collegato agli estremi dell'ellissoide $(0, 0, \pm R)$ tramite due molle di costante elastica k.

1) Si parametrizzi l'ellissoide usando coordinate cilindriche, i.e., nella forma

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \rho(z)\cos\theta \\ \rho(z)\sin\theta \\ z \end{pmatrix} \quad \text{con } \rho(z) = \sqrt{\frac{R^2 - z^2}{2}}, z \in [-R, R], \theta \in [0, 2\pi).$$

Si scriva quindi la Lagrangiana del sistema in termini delle coordinate (z, θ) e delle loro derivate.

2) Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti.
3) Si riconosca che il sistema ammette una coordinata ciclica e si identifichi il momento conservato corrispondente (si chiami A il suo valore). Usando la legge di conservazione di tale momento, si esprima $\dot{\theta}$ in termini di $A, z, \dot{z}$.
4) Si scriva l'espressione dell'energia meccanica E del sistema. Si sostituisca l'espressione di $\dot{\theta}$ in termini di $A, z, \dot{z}$ ricavata al punto precedente in quella dell'energia meccanica, e si esprima quest'ultima in termini di A e delle sole variabili $(z, \dot{z})$. Si identifichi quindi il potenziale efficace $V_{eff}(z)$.
5) Si determini l'equazione delle curve di livello nel piano $(z, \dot{z})$ e se ne disegni il grafico, per $A > 0$ fissato, al variare dell'energia E. Si discuta la natura qualitativa del moto della variabile z.
6) Si determinino le condizioni sui dati iniziali affinché il moto complessivo del sistema sia periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito. Esistono dati iniziali per cui il moto complessivo non è periodico? Se sì, qual è la natura di tali moti non periodici?