Elisabetta Colantoni e Giulia Degni
FM-210 Meccanica Analitica
6 maggio 2022

Soluzioni Tutorato VIII

Question 1. Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}\left(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2\right)=\frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2\right)+q_1^2+q_2^2-\left(q_1^2+q_2^2\right)^3$$

1) Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange, e determinare l'energia (generalizzata) E, conservata dalle equazioni del moto.
2) Sfruttando la simmetria della Lagrangiana, dimostrare che esiste un integrale primo distinto da E. Detto I tale integrale primo, si consideri il sistema di Lagrange ristretto sui livelli $I=c$, con $c \in \mathbb{R} \backslash\{0\}$. Si dimostri che tale restrizione è ancora un sistema Lagrangiano, ad un grado di libertà, e si scriva la corrispondente Lagrangiana ridotta.
3) Si studi qualitativamente il moto del sistema unidimensionale associato a tale Lagrangiana ridotta.

Soluzione Le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema sono:

$$\left\{\begin{array}{l}\ddot{q}_1=2 q_1-6 q_1\left(q_1^2+q_2^2\right)^2 \\ \ddot{q}_2=2 q_2-6 q_2\left(q_1^2+q_2^2\right)^2\end{array}\right.$$

L'energia generalizzata E, costante lungo le soluzioni alle equazioni di Eulero-Lagrange, è
$E=\dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}-\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})=\frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2\right)-\left(q_1^2+q_2^2\right)+\left(q_1^2+q_2^2\right)^3 \equiv \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^2+U(\mathbf{q})$,
dove il potenziale U è

$$U(\mathbf{q})=-\mathbf{q}^2+\mathbf{q}^6$$

- La Lagrangiana è invariante per rotazioni, i.e., è invariate sotto trasformazioni delle coordinate $\mathbf{q} \rightarrow g_\alpha(\mathbf{q})$ della forma:

$$g_\alpha(\mathbf{q})=\left(\begin{array}{cc}\cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha\end{array}\right)\left(\begin{array}{l}q_1 \\ q_2\end{array}\right)$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$, e delle corrispondenti trasformazioni delle velocità

$$\dot{\mathbf{q}} \rightarrow\left(\begin{array}{cc}\cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha\end{array}\right) \dot{\mathbf{q}}$$

La corrispondente grandezza conservata è, per il teorema di Noether,

$$I=I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})=\mathbf{f}(\mathbf{q}) \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}},$$

dove

$$\mathbf{f}(\mathbf{q})=\left.\frac{d g_\alpha(\mathbf{q})}{d \alpha}\right|_{\alpha=0}=\left(\begin{array}{c}-q_2 \\ q_1\end{array}\right)$$

e $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}=\dot{\mathbf{q}}$, cosicché

$$I=q_1 \dot{q}_2-q_2 \dot{q}_1 .$$

E conveniente passare a coordinate 'adattate alle simmetrie del sistema': visto che il potenziale $U(\mathbf{q})$ dipende solo dal modulo di $\mathbf{q}$, passo a coordinate polari:

$$\mathbf{q}=\mathbf{q}(r, \theta)=\left(\begin{array}{l}r \cos \theta \\ r \sin \theta\end{array}\right)$$

e noto che il potenziale, nelle nuove coordinate, dipende dalla sola coordinata r :

$$U(\mathbf{q}(r,\theta)) = -r^2 + r^6 \equiv V(r).$$

In altre parole, θ è una coordinata ciclica per la Lagrangiana $\tilde{\mathcal{L}}$ ottenuta trasformando la Lagrangiana originale nelle nuove coordinate, che ha la forma:

$$\tilde{\mathcal{L}}(r,\dot{r},\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + r^2 - r^6$$

In tali coordinate, la conservazione di I prende la forma:

$$I = \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{\theta}} = r^2\dot{\theta} \equiv c$$

Assumendo $c \neq 0$, posso invertire tale relazione nella forma $\dot{\theta} = \frac{c}{r^2}$. Usando il metodo di riduzione di Routh, ottengo la Lagrangiana ridotta le cui equazioni di Eulero-Lagrange descrivono il moto del sistema sulla superficie $I(r,\dot{\theta}) = c$:

$$\tilde{\mathcal{L}}_R(r,\dot{r}) = \tilde{\mathcal{L}}(r,\dot{r},\dot{\theta}) - \dot{\theta}\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{\theta}}\bigg|_{\dot{\theta}=\frac{c}{r^2}} = \tilde{\mathcal{L}}\left(r,\dot{r},\frac{c}{r^2}\right) - \frac{c^2}{r^2} = \frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{c^2}{2r^2} + r^2 - r^6.$$

- L'equazione del moto associata a $\tilde{\mathcal{L}}_R(r,\dot{r})$ è

$$\ddot{r} = \frac{c^2}{r^3} + 2r - 6r^5$$

le cui soluzioni conservano l'energia

$$E = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{c^2}{2r^2} - r^2 + r^6 \equiv \frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$$

Il grafico qualitativo di $V_{eff}(r) = \frac{c^2}{2r^2} - r^2 + r^6$ è mostrato in Fig. 1 .

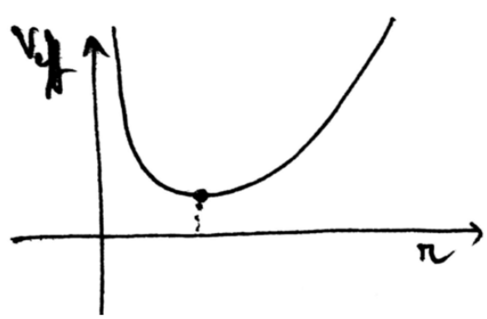

FIGURA 1

Le curve di livello corrispondenti, al variare dell'energia E, sono mostrate in Fig 2.

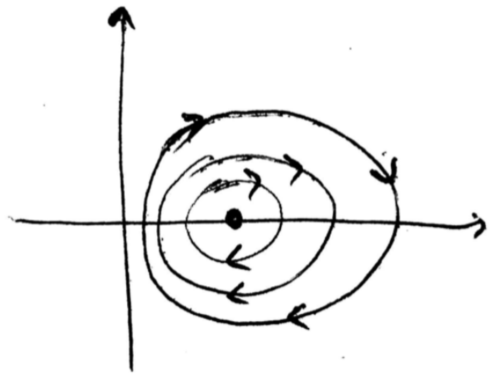

Figura 2

I moti corrispondenti a tali curve di livello sono tutti chiusi e periodici.

Question 2. Consideriamo un sistema meccanico formato da due punti A e B di massa m in cui A è collegato ad un punto fisso O tramite una sbarretta lunga L di massa M e B è collegato ad A tramite una molla di costante elastica $k > 0$ di lunghezza a riposo nulla.

Scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrage. Trovare poi i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.

[Suggerimento: Conviene usare come coordinate lagrangiane l'angolo φ_1 che il punto A forma con la verticale discendente e le coordinate cartesiane (x, y) del punto B.]

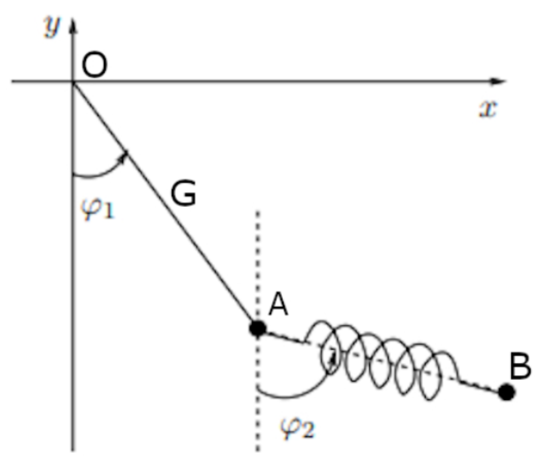

Figura 3

Soluzione Scriviamo le coordinate dei punti:

$$A = (L\sin\varphi_1, -L\cos\varphi_1) \quad G = \left(\frac{L}{2}\sin\varphi_1, -\frac{L}{2}\cos\varphi_1\right) \quad B = (x, y)$$

dove G è il centro di massa della sbarretta. Scriviamo ora le velocità:

$$\dot{A} = (\dot{\varphi}_1 L\cos\varphi_1, \dot{\varphi}_1 L\sin\varphi_1) \quad \dot{G} = \left(\dot{\varphi}_1\frac{L}{2}\cos\varphi_1, \dot{\varphi}_1\frac{L}{2}\sin\varphi_1\right) \quad \dot{B} = (\dot{x}, \dot{y})$$

Calcoliamo l'energia cinetica:

$$\frac{m}{2}|\dot{A}|^2 + \frac{M}{2}|\dot{G}|^2 + \frac{I}{2}\dot{\varphi}_1^2 + \frac{m}{2}|\dot{B}|^2 = \left(\frac{m}{2} + \frac{7M}{24}\right)L^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$$

E il potenziale (a meno di costanti additive):

$$V = Mgy_G + mgy_A + mgy_B + \frac{k}{2}|AB|^2 = -gL\left(\frac{M}{2}+m\right)\cos\varphi_1 + mgy + \frac{k}{2}\left(x^2+y^2+L^2\right) - Lk\left(x\sin\varphi_1 - y\cos\varphi_1\right)$$

Se non c'è L^2 riprendetevela con quelli in classe La lagrangiana sarà $\mathcal{L}(\varphi_1, x, y, \dot{\varphi}_1, \dot{x}, \dot{y}) = T - V$ e quindi le equazioni di Eulero- Lagrange :

$$\begin{cases} L^2\left(m+\frac{M}{3}\right)\ddot{\varphi}_1 = -gL\left(\frac{M}{2}-m\right)\sin\varphi_1 + Lk\left(x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1\right) \\ m\ddot{x} = -kx + Lk\sin\varphi_1 \\ m\ddot{y} = -mg - ky - Lk\cos\varphi_1 \end{cases}$$

Troviamo quindi i punti di equilibrio $Q_1 = (\varphi_1, x, y) = \left(0, 0, -L - \frac{mg}{k}\right)$ (di equilibrio stabile) e $Q_2 = \left(\pi, 0, L - \frac{mg}{k}\right)$ (di equilibrio instabile). Studiate la stabilità studiando la matrice Hessiana del potenziale:

$$\begin{pmatrix} gL\left(\frac{M}{2}+m\right)\cos\varphi_1 + Lk\left(x\sin\varphi_1 - y\cos\varphi_1\right) & -Lk\cos\varphi_1 & -Lk\sin\varphi_1 \\ -Lk\cos\varphi_1 & k & 0 \\ -Lk\sin\varphi_1 & 0 & k \end{pmatrix}$$

Question 3. Una massa puntiforme m è vincolata a muoversi sotto l'effetto della forza peso sulla superficie di un cono di semiampiezza al vertice $\theta \in (0, \pi/2)$, con asse in direzione verticale e vertice rivolto verso il basso, come in figura.

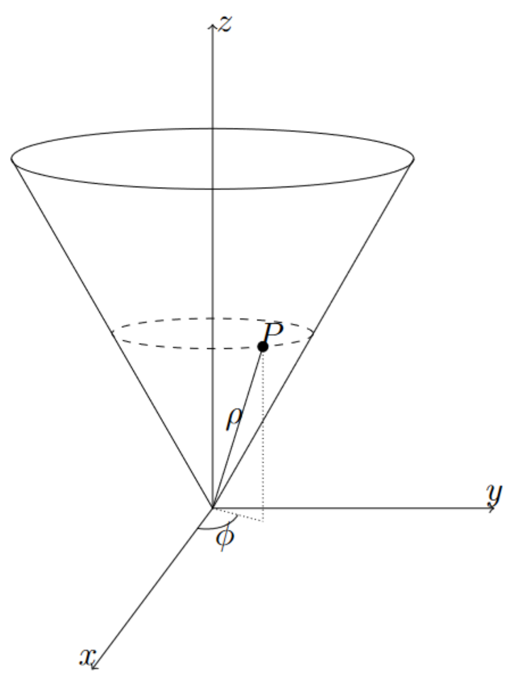

Figura 4

1) Si parametrizzi la superficie del vincolo usando coordinate sferiche centrate nel vertice del cono: in altre parole, si scelgano come coordinate parametriche la distanza $\rho > 0$ dal vertice del cono, e l'angolo azimutale φ, come in figura.
2) Si scriva la Lagrangiana $\mathcal{L}$ del sistema, usando come coordinate Lagrangiane le variabili $(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi})$. Si riconosca che φ è una variabile ciclica.
3) Si ricavino le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. Si riconosca che tale sistema di equazioni ammette due grandezze conservate: l'energia meccanica E e il momento coniugato alla variabile ciclica φ, che chiameremo A (Che da qui in poi supporremo non nulla).

4) Usando la conservazione di A, si elimini la dipendenza di $\dot\varphi$ nell'espressione di E, e si esprima cosí l'energia meccanica del sistema in funzione di $\rho, \dot\rho$ e di A nella forma $E = m\dot\rho^2/2 + V_{eff}(\rho)$: qual è l'espressione del potenziale efficace $V_{eff}(\rho)$?
5) Si studi il grafico di V_{eff} e si discuta la natura qualitativa del moto radiale.
6) Si discutano le condizioni per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito.

[Suggerimento: θ è un angolo dato e quindi fisso, non dipendete dal tempo]

Soluzione

1) $P = (\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)$
2) $\dot P = (\dot\rho\cos\varphi\sin\theta - \rho\dot\varphi\sin\varphi\sin\theta, \dot\rho\sin\varphi\sin\theta + \rho\dot\varphi\cos\varphi\sin\theta, \dot\rho\cos\theta)$

$$T = \frac{m}{2}|\dot P|^2 = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2\sin^2\theta\right) \quad V = mg\rho\cos\theta$$

Quindi la lagrangiana è $\mathcal{L}(\rho,\varphi,\dot\rho,\dot\varphi) = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2\sin^2\theta\right) - mg\rho\cos\theta$.
Notiamo che $\mathcal{L}$ è indipendente da φ e che quindi, per definizione, è una variabile ciclica.
3) Le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{cases} m\ddot\rho = m\rho\dot\varphi^2\sin^2\theta - mg\cos\theta \\ \frac{d}{dt}\left(m\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi\sin^2\theta\right) = 0 \end{cases}$$

Oltre all'energia

$$E = T + V = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2\sin^2\theta\right) + mg\rho\cos\theta$$

c'è un secondo integrale primo

$$A := m\rho^2\dot\varphi\sin^2\theta \Rightarrow \dot\varphi = \frac{A}{m\rho^2\sin^2\theta}$$

4) Riscriviamo quindi E :

$$E = \frac{m}{2}\dot\rho^2 + \frac{A^2}{2m\rho^2\sin^2\theta} + mg\rho\cos\theta = \frac{m}{2}\dot\rho^2 + V_{eff}(\rho)$$

dove

$$V_{eff}(\rho) = \frac{A^2}{2m\rho^2\sin^2\theta} + mg\rho\cos\theta$$

$$V'_{eff}(\rho) = mg\cos\theta - \frac{A^2}{2m\rho^2\sin^2\theta}$$

5) $V'_{eff}(\rho) > 0 \iff \rho > \left(\frac{A^2}{m^2 g\sin^2\theta\cos\theta}\right)^{1/3} =: \rho_0$ quindi ρ_0 è un punto di minimo del potenziale efficace e $(\rho_0, 0)$ è punto stabile del sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot\rho = y \\ m\dot y = -V'_{eff}(\rho) \end{cases}$$

Dato che V_{eff} ha asintoto verticale $\rho = 0$ e asintoto obliquo $f(\rho) = (mg\cos\theta)\rho$, il potenziale ha la seguente forma:

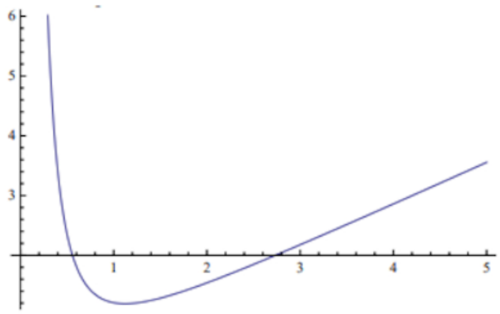

FIGURA 5

Quindi se $E = V'_{eff}(\rho_0)$ allora abbiamo il moto banale $\rho(t) \equiv \rho_0$ mentre se $E > V'_{eff}(rho_0)$ allora abbiamo che il moto radiale è un moto chiuso periodico per ogni dato iniziale.

6) Il moto complessivo può essere periodico o quasi-periodico, a seconda del rapporto tra il periodo del moto radiale e di quello angolare. Se il moto radiale è banale, $\rho(t) \equiv \rho_0$, allora il moto complessivo è periodico, di velocità angolare $\dot{\varphi} = \text{cost.} = \frac{A}{m\rho_0^2 \sin^2\theta}$ e di periodo $T = \frac{2\pi m \rho_0^2 \sin^2\theta}{A}$.

   Se $E > V_{eff}(\rho_0)$ allora il moto di ρ è non banale e periodico, di periodo

$$T_\rho = 2\int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(\rho)\right)}}$$

   dove $\rho_\pm$sono le due radici di $E = V_{eff}(\rho)$.

   L'incremento di φ durante un periodo di ρ è

$$\Delta\varphi = 2\frac{A}{m\sin^2\theta}\int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(\rho)\right)}}$$

   Il moto complessivo è periodico se e solo se $\frac{\Delta\varphi}{2\pi} \in \mathbb{Q}$, e in questo caso, se $\Delta\varphi = \frac{2\pi p}{q}$, allora il periodo del moto è qT_ρ.

Question 4. Si consideri un punto materiale di massa m vincolato a muoversi su una superficie ellissoidale di equazione

$$2\left(x^2 + y^2\right) + z^2 = R^2$$

sottoposto all'azione della gravità e collegato agli estremi dell'ellissoide $(0, 0, \pm R)$ tramite due molle di costante elastica k.

1) Si parametrizzi l'ellissoide usando coordinate cilindriche, i.e., nella forma

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \rho(z)\cos\theta \\ \rho(z)\sin\theta \\ z \end{pmatrix} \quad \text{con}\ \rho(z) = \sqrt{\frac{R^2 - z^2}{2}}, z \in [-R, R], \theta \in [0, 2\pi)$$

   Si scriva quindi la Lagrangiana del sistema in termini delle coordinate (z, θ) e delle loro derivate.
2) Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti.
3) Si riconosca che il sistema ammette una coordinata ciclica e si identifichi il momento conservato corrispondente (si chiami A il suo valore). Usando la legge di conservazione di tale momento, si esprima $\dot{\theta}$ in termini di $A, z, \dot{z}$.
4) Si scriva l'espressione dell'energia meccanica E del sistema. Si sostituisca l'espressione di $\dot{\theta}$ in termini di $A, z, \dot{z}$ ricavata al punto precedente in quella dell'energia meccanica, e si esprima quest'ultima in termini di A e delle sole variabili $(z, \dot{z})$. Si identifichi quindi il potenziale efficace $V_{eff}(z)$.
5) Si determini l'equazione delle curve di livello nel piano $(z, \dot{z})$ e se ne disegni il grafico, per $A > 0$ fissato, al variare dell'energia E. Si discuta la natura qualitativa del moto della variabile z.

6) Si determinino le condizioni sui dati iniziali affinché il moto complessivo del sistema sia periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito. Esistono dati iniziali per cui il moto complessivo non è periodico? Se sì, qual è la natura di tali moti non periodici?

Soluzione

1) Usando la paramterizzazione suggerita troviamo che la velocità della particella è

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{z}\begin{pmatrix} \frac{-z}{\sqrt{2(R^2-z^2)}}\cos\theta \\ \frac{-z}{\sqrt{2(R^2-z^2)}}\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix} + \dot{\theta}\begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{R^2-z^2}{2}}\sin\theta \\ \sqrt{\frac{R^2-z^2}{2}}\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

cosicché l'energia cinetica in termini di $(z, \theta, \dot{z}, \dot{\theta})$ ha la forma:

$$\begin{aligned} T = \frac{m}{2}|\dot{\mathbf{x}}|^2 &= \frac{m}{2}\dot{z}^2\left(\frac{z^2}{2\,(R^2-z^2)}+1\right) + \frac{m}{2}\frac{(R^2-z^2)}{2}\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{m}{2}\dot{z}^2\frac{R^2-\frac{z^2}{2}}{R^2-z^2} + \frac{m}{4}\left(R^2-z^2\right)\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

L'energia potenziale gravitazionale è semplicemente $U_g = mgz$, mentre quella elastica è (usando di nuovo la parametrizzazione suggerita per $\mathbf{x}$)

$$\begin{aligned} U_{el} &= \frac{1}{2}k\left[|\mathbf{x}-(0,0,R)|^2 + |\mathbf{x}-(0,0,-R)|^2\right] = k\left(|\mathbf{x}|^2 + R^2\right) \\ &= k\left(\frac{R^2-z^2}{2} + z^2 + R^2\right) = \frac{1}{2}kz^2 + \frac{3}{2}kR^2 \end{aligned}$$

La Lagrangiana risultante si ottiene sottraendo all'espressione dell'energia cinetica T quelle di U_g e U_{el}, cosicché, a meno di una costante additiva (irrilevante per i calcoli successivi),

$$\mathcal{L}(z,\theta,\dot{z},\dot{\theta}) = \frac{m}{2}\dot{z}^2\frac{R^2-\frac{z^2}{2}}{R^2-z^2} + \frac{m}{4}\left(R^2-z^2\right)\dot{\theta}^2 - mgz - \frac{1}{2}kz^2.$$

2) Le equazioni di Eulero-Lagrange associate a $\mathcal{L}$ sono:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(m\dot{z}\frac{R^2-\frac{z^2}{2}}{R^2-z^2}\right) = \frac{m}{2}\dot{z}^2\left(\frac{-z}{R^2-z^2} + 2z\frac{R^2-\frac{z^2}{2}}{(R^2-z^2)^2}\right) - \frac{m}{2}z\dot{\theta}^2 - mg - kz \\ \text{e} \quad &\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\left(R^2-z^2\right)\dot{\theta}\right) = 0 \Longleftrightarrow \frac{m}{2}\left(R^2-z^2\right)\ddot{\theta} - mz\dot{z}\dot{\theta} = 0. \end{aligned}$$

La prima equazione si può semplificare nella forma:

$$m\ddot{z}\frac{R^2-\frac{z^2}{2}}{R^2-z^2} = -\frac{mR^2}{2}\frac{z\dot{z}^2}{(R^2-z^2)^2} - \frac{m}{2}z\dot{\theta}^2 - mg - kz$$

mentre la seconda è la legge di conservazione associata alla variabile ciclica θ.

3) Come già osservato al punto precedente, la variabile θ è ciclica, e la legge di conservazione associata al suo momento coniugato (corrispondente alla seconda equazione di Eulero-Lagrange derivata sopra) si può scrivere nella forma:

$$\frac{m}{2}\left(R^2-z^2\right)\dot{\theta} = A$$

da cui

$$\dot{\theta} = \frac{2A}{m\,(R^2-z^2)}$$

4) L'espressione dell'energia meccanica E del sistema in termini delle variabili $(z, \theta, \dot{z}, \dot{\theta})$ è

$$E = \frac{m}{2}\dot{z}^2 \frac{R^2 - \frac{z^2}{2}}{R^2 - z^2} + \frac{m}{4}\left(R^2 - z^2\right)\dot{\theta}^2 + mgz + \frac{1}{2}kz^2$$

Sostituendo in tale equazione l'espressione di $\dot{\theta}$ in termini di $A, z, \dot{z}$ ricavata al punto precedente troviamo

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2}\dot{z}^2 \frac{R^2 - \frac{z^2}{2}}{R^2 - z^2} + \frac{m}{4}\left(R^2 - z^2\right)\frac{4A^2}{m^2\left(R^2 - z^2\right)^2} + mgz + \frac{1}{2}kz^2 \\ &= \frac{m}{2}\dot{z}^2 \frac{R^2 - \frac{z^2}{2}}{R^2 - z^2} + \frac{A^2}{m\left(R^2 - z^2\right)} + mgz + \frac{1}{2}kz^2 \\ &\equiv \frac{m}{2}\dot{z}^2 \frac{R^2 - \frac{z^2}{2}}{R^2 - z^2} + V_{eff}(z) \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo introdotto il potenziale efficace $V_{eff}(z)$:

$$V_{eff}(z) = \frac{A^2}{m\left(R^2 - z^2\right)} + mgz + \frac{1}{2}kz^2$$

Il grafico di $V_{eff}(z)$ per $A > 0$ è riportato in Fig.6.

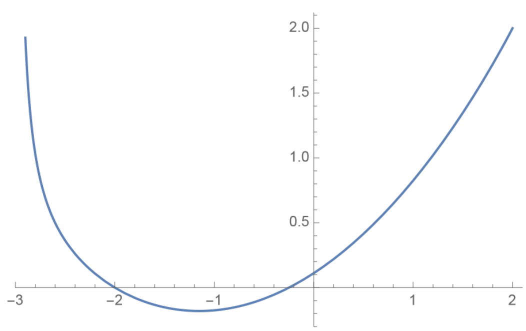

FIGURA 6. Grafico di $V_{eff}(z)$ per $A > 0$.

5) L'equazione delle curve di livello nel piano $(z, \dot{z})$ è

$$\dot{z} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\frac{\left(R^2 - z^2\right)}{\left(R^2 - \frac{z^2}{2}\right)}\left(E - V_{eff}(z)\right)}$$

il cui grafico, per $A > 0$ fissato, al variare dell'energia E, è riportato in Fig.7. Come evidente dalla struttura delle curve di livello, il sistema ammette un unico punto di equilibrio stabile z_{eq} (che è l'unico zero dell'equazione $V'_{eff}(z) = 0$, ed è negativo per ogni scelta di $A > 0$). Tutti i moti del sistema sono periodici e (a parte il moto "banale" corrispondente a $z(t) \equiv z_{eq}$) consistono in oscillazioni finite attorno a z_{eq}, di periodo

$$T_1 = 2\int_{z_-}^{z_+}\sqrt{\frac{m\left(R^2 - \frac{z^2}{2}\right)}{2\left(R^2 - z^2\right)\left(E - V_{eff}(z)\right)}}dz$$

dove $z_\pm$sono i due zeri di $E = V_{eff}(z)$, con $E > V_{eff}\left(z_{eq}\right)$.

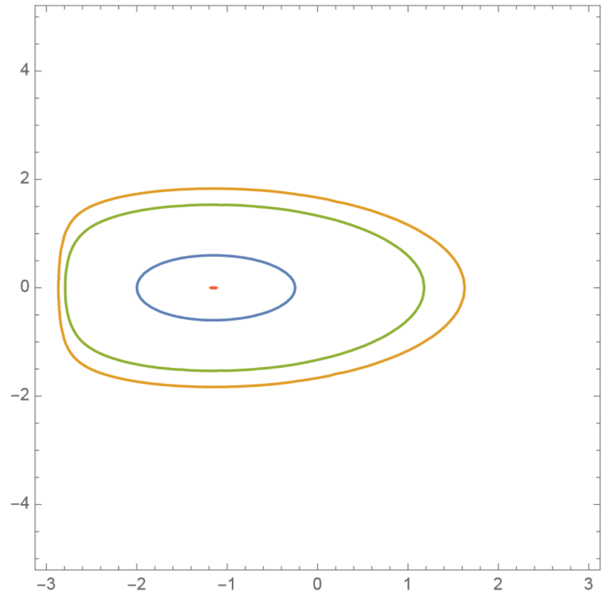

Figura 7. Grafico delle curve di livello nel piano delle fasi ridotto $(z, \dot{z})$.

6) Il caso più semplice in cui il moto complessivo del sistema è periodico è quello in cui il moto della variabile z è banale, i.e., $z(t) \equiv z_{eq}$, nel qual caso la frequenza angolare corrispondente al moto di θ è costante, $\dot{\theta} = \frac{2A}{m\left(R^2 - z_{eq}^2\right)}$, e di conseguenza il moto complessivo è periodico di periodo $T = \frac{\pi m\left(R^2 - z_{eq}^2\right)}{A}$.

Se invece il moto della variabile z è periodico non banale, allora la condizione affinché il moto complessivo del sistema sia periodico è che il moto della variabile θ, che in generale è quasi-periodico a due periodi T_1 e T_2, sia periodico esso stesso. Perché il moto della variabile θ (e di conseguenza anche il moto complessivo) sia periodico, dobbiamo imporre che il periodo T_2 sia uguale a un multiplo razionale di T_1. L'espressione per T_2 si ottiene dalla formula

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{T_2} &= \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} \frac{2A}{m\left(R^2 - z^2(t)\right)} dt = \\ &= \frac{2}{T_1}\int_{z_-}^{z_+} \frac{2A}{m\left(R^2 - z^2(t)\right)} \sqrt{\frac{m\left(R^2 - \frac{z^2}{2}\right)}{2\left(R^2 - z^2\right)\left(E - V_{eff}(z)\right)}} dz\end{aligned}$$

cosicché la condizione affinché il moto complessivo sia periodico prende la forma

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{\pi}\int_{z_-}^{z_+} \frac{2A}{m\left(R^2 - z^2\right)} \sqrt{\frac{m\left(R^2 - \frac{z^2}{2}\right)}{2\left(R^2 - z^2\right)\left(E - V_{eff}(z)\right)}} dz = \frac{n_1}{n_2}$$

per due interi n_1, n_2 primi tra loro. Se tale condizione è soddisfatta, il periodo del moto risultante è $T = n_2 T_1 = n_1 T_2$. Se invece il secondo periodo, T_2, del moto della variabile θ non è un multiplo razionale di T_1, allora il moto complessivo è quasiperiodico a due periodi, e la traiettoria risultante riempie densamente una regione bidimensionale dello spazio.