

Soluzioni Tutorato VII

Question 1. Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange per il sistema bidimensionale di Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = q_2 \dot{q}_1 - q_1 \dot{q}_2 - 2q_1 q_2$$

e trovarne esplicitamente la soluzione.

Soluzione Le equazioni di Eulero-Lagrange sono della forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} &= -\dot{q}_2 - 2q_2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} &= q_2 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} &= \dot{q}_1 - 2q_1 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} &= -q_1 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = -\dot{q}_1 \end{aligned}$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono quindi:

$$\begin{cases} \dot{q}_2 = -\dot{q}_2 - 2q_2 \\ -\dot{q}_1 = \dot{q}_1 - 2q_1 \end{cases}$$

Le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} q_2(t) = q_2(0)e^{-t} \\ q_1(t) = q_1(0)e^t \end{cases}$$

Question 2. Si calcolino le reazioni vincolari del pendolo semplice di massa m e lunghezza ℓ . In particolare si determino in corrispondenza di quale configurazione assumono il valore massimo e il valore minimo.

Soluzione Poiché, come visto, $(x, y) = (\ell \sin \theta, -\ell \cos \theta)$, si ha

$$\begin{cases} \ddot{x} = \ell \ddot{\theta} \cos \theta - \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ \ddot{y} = \ell \ddot{\theta} \sin \theta + \ell \dot{\theta}^2 \cos \theta \end{cases}$$

dove $\ell \ddot{\theta} = -g \sin \theta$ e $\ell \dot{\theta}^2 + 2g(1 - \cos \theta) = gA$, se $A := \frac{2E}{mg\ell}$ (per la conservazione dell'energia $\frac{E}{m}$). Ho ottenuto quest'ultima relazione calcolando

$$E = T + U = \frac{m}{2} |\dot{x}|^2 + mg(1 - \cos \theta)$$

Scrivendo quindi le componenti $f_{V,x} = m\ddot{x}$ e $f_{V,y} = m\ddot{y} + mg$ si trova

$$f_{V,x} = -mg(A + 3 \cos \theta - 2) \sin \theta, \quad f_{V,y} = mg(A + 3 \cos \theta - 2) \cos \theta$$

Il massimo della funzione $|\mathbf{f}_v| = |f_{V,x}|^2 + |f_{V,y}|^2 = m^2 g^2 (A + 3 \cos \theta - 2)^2$ è quindi raggiunto quando $\theta = 0$, mentre il minimo si ha per $\theta = \pi$

Question 3. Si consideri un pendolo costituito da una molla di lunghezza di riposo ℓ sospesa a un punto di sospensione O , al cui estremo libero è appesa una massa m (vedi Fig.1). Si scriva la Lagrangiana del sistema usando le coordinate x e θ , dove $\ell + x$ è la lunghezza della molla e θ l'angolo formato con la verticale verso il basso, come in figura. Si determinino le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti.

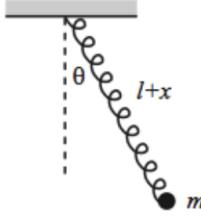
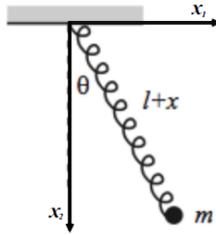


FIGURA 1

Soluzione Consideriamo il seguente sistema di riferimento:



Ricordiamo che la Lagrangiana è definita come: $\mathcal{L} = T - U$ dove T è l'energia cinetica e U è il potenziale. Cominciamo con riscriverci le coordinate $x_{1,m}$ e $x_{2,m}$ del punto di massa m in termini delle coordinate x e θ :

$$\begin{cases} x_{1,m} = (\ell + x) \sin \theta \\ x_{2,m} = (\ell + x) \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{1,m} = \dot{x} \sin \theta + (\ell + x) \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{x}_{2,m} = \dot{x} \cos \theta - (\ell + x) \dot{\theta} \sin \theta \end{cases}$$

Notiamo che il corpo di massa m è soggetto sia alla forza peso che alla forza elastica:

$$\Rightarrow U = U_{el} + U_{grav} = \frac{1}{2} k x^2 - mg(\ell + x) \cos \theta$$

Pertanto la Lagrangiana sarà:

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} m [\dot{x}^2 + (\ell + x)^2 \dot{\theta}^2] - \frac{1}{2} k x^2 + mg(\ell + x) \cos \theta$$

Da cui:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= m(\ell + x) \dot{\theta}^2 - kx + mg \cos \theta \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= -mg(\ell + x) \sin \theta \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= m(\ell + x)^2 \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = 2m(\ell + x) \dot{x} \dot{\theta} + m(\ell + x)^2 \ddot{\theta} \end{aligned}$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono quindi:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = m(\ell + x) \dot{\theta}^2 - kx + mg \cos \theta \\ 2(\ell + x) \dot{x} \dot{\theta} + (\ell + x)^2 \ddot{\theta} = -g(\ell + x) \sin \theta \end{cases}$$

Question 4. Un sistema meccanico è costituito da tre punti P_1, P_2 e Q , di masse, rispettivamente $m_1 = m_2 = m$ e $m_3 = 2m$, vincolati su un piano verticale π . I due punti P_1 e P_2 si muovono lungo un asse orizzontale (che si può identificare con l'asse x) e sono entrambi collegati a Q tramite due sbarre rettilinee di lunghezza L e massa trascurabile. Il punto P_1 è collegato a un punto fisso O dell'asse lungo cui scorre tramite una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Sia g l'accelerazione di gravità.

- 1) Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange, utilizzando come coordinate lagrangiane l'ascissa x del punto Q lungo l'asse orizzontale e l'angolo θ che la retta passante per i punti P_1 e Q forma con tale asse.
- 2) Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
- 3) Per $k = 0$ si discuta qualitativamente il moto.
- 4) Sempre per $k = 0$, partendo dalla configurazione iniziale:

$$x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0 \quad \theta(0) = 0 \quad \dot{\theta}(0) = 0$$

si descriva qualitativamente il moto e si determini la forza vincolare nel punto Q in funzione del tempo, in particolare quando tale punto si trova a quota $\frac{L}{\sqrt{2}}$ al di sotto dell'asse x .

- 5) Si discuta come si modifica la trattazione se entrambe le sbarre hanno massa M e sono omogenee.

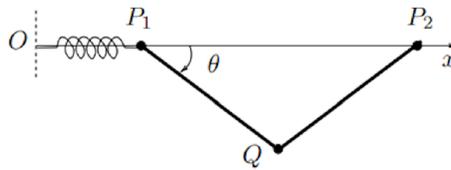


FIGURA 2

Soluzione

- 1) Per scrivere la lagrangiana calcoliamo energia cinetica e potenziale. Iniziamo scrivendo le coordinate dei tre punti:

$$P_1 = (x - L \cos \theta; 0) \quad P_2 = (x \pm L \cos \theta; 0) \quad Q = (x, -L \sin \theta)$$

e le tre velocità:

$$\dot{P}_1 = (\dot{x} + L\dot{\theta} \sin \theta; 0) \quad \dot{P}_2 = (\dot{x} \mp L\dot{\theta} \sin \theta; 0) \quad \dot{Q} = (\dot{x}, -L\dot{\theta} \cos \theta)$$

Ora l'energia cinetica (vanno divisi divisi due casi, se in P2 ho + o se ho -. Io faccio + perché l'altro è molto simile):

$$T = \frac{m_1}{2} |\dot{P}_1|^2 + \frac{m_2}{2} |\dot{P}_2|^2 + \frac{m_3}{2} |\dot{Q}|^2 = m (2\dot{x}^2 + L^2\dot{\theta}^2)$$

La potenziale:

$$V = U_{P_Q} + U_{E_{P_1}} = m_3 g y_Q + \frac{k}{2} x_{P_1}^2 = -2mgL \sin \theta + \frac{k}{2} (x^2 + L^2 \cos^2 \theta - 2Lx \cos \theta)$$

Quindi $\mathcal{L} = T - V$ con T e V appena calcolati e quindi le equazioni di Eulero-Lagrange sono:

$$\begin{cases} 4m\ddot{x} = -kx + kL \cos \theta \\ 2mL^2\ddot{\theta} = 2mgL \cos \theta + \frac{k}{2} L^2 \sin 2\theta - kLx \sin \theta \end{cases}$$

- 2) Per calcolare i punti di equilibrio, vista l'equivalenza tra le equazioni di Newton e quelle di Eulero-Lagrange, ci basta risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} -kx + kL \cos \theta = 0 \\ 2mgL \cos \theta + \frac{k}{2} L^2 \sin 2\theta - kLx \sin \theta = 0 \end{cases}$$

ottenendo così che i punti di equilibrio sono $(x, \theta) = (0, \frac{\pi}{2})$ e $(x, \theta) = (0, -\frac{\pi}{2})$.

Calcolando la matrice hessiana del potenziale e calcolandola nei punti di equilibrio

$$\begin{pmatrix} k & Lk \sin \theta \\ Lk \sin \theta & 2mgL \sin \theta + 2kLx \cos \theta - kL^2 \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

vediamo che $(0, \frac{\pi}{2})$ è un punto di equilibrio stabile e che $(0, -\frac{\pi}{2})$ è un punto di equilibrio instabile.

- 3) Per $k = 0$ cioè in assenza della molla abbiamo che $\ddot{x} = 0$ e che $L\ddot{\theta} = g \cos \theta$, quindi il centro di massa del sistema si muove di moto rettilineo uniforme, mentre l'equazione per la variabile θ descrive un moto unidimensionale di un punto di massa $m = 1$ ed energia potenziale $V = \frac{g}{L} \sin \theta$. Nel sistema del centro di massa, il sistema descrive un moto simile a quello di un pendolo semplice.
- 4) Sempre per $k = 0$, considerando che il moto parte con la configurazione iniziale:

$$x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0 \quad \theta(0) = 0 \quad \dot{\theta}(0) = 0,$$

la forza vincolare che agisce sul punto Q è data da

$$R^{(Q)} = (2m\ddot{x} - f_x^{(Q)}, 2m\ddot{y} - f_y^{(Q)})$$

dove $\ddot{x} = 0, \ddot{y} = L\dot{\theta}^2 \sin \theta - L\ddot{\theta} \cos \theta, f_x^{(Q)} = 0$ e $f_y^{(Q)} = -2mg$, così che

$$R^{(Q)} = (0, 2m(L\dot{\theta}^2 \sin \theta - L\ddot{\theta} \cos \theta)) = (0, 2mg(\cos^2 \theta - 2\sin^2 \theta + 1))$$

dove si è usato che l'energia totale per il moto della variabile θ è $E(\theta, \dot{\theta}) = 0$ in corrispondenza dei dati iniziali scelti. In particolare, quando Q si trova alla quota $\frac{L}{\sqrt{2}}$ sotto l'asse x , si ha $\frac{\theta}{4}$ e quindi la forza vincolare $R^{(Q)} = (0, 0)$.

- 5) Se le due sbarre hanno massa M , l'energia cinetica delle sbarre può essere calcolata utilizzando il teorema di König. Innanzitutto cerchiamo i centri di massa delle due sbarrette e le loro velocità:

$$G_1 = \left(x - \frac{L}{2} \cos \theta; -\frac{L}{2} \sin \theta\right) \quad G_2 = \left(x \pm \frac{L}{2} \cos \theta; -\frac{L}{2} \sin \theta\right)$$

$$\dot{G}_1 = \left(\dot{x} + \frac{L\dot{\theta}}{2} \sin \theta; -\frac{L\dot{\theta}}{2} \cos \theta\right) \quad \dot{G}_2 = \left(\dot{x} \mp \frac{L\dot{\theta}}{2} \sin \theta; -\frac{L\dot{\theta}}{2} \cos \theta\right)$$

Calcoliamo l'energia cinetica:

$$\frac{1}{2}M|\dot{G}_1|^2 + \frac{I_1\dot{\theta}^2}{2} + \frac{1}{2}M|\dot{G}_2|^2 + \frac{I_2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{1}{2}m|\dot{P}_1|^2 + \frac{1}{2}m|\dot{P}_2|^2 + \frac{1}{2}m|\dot{Q}|^2 = (M + 2m)\dot{x}^2 + \left(\frac{M}{3} + m\right)L^2\dot{\theta}^2$$

dove ho usato che $I_1 = I_2 = \frac{ML^2}{12}$

Ora il potenziale:

$$V = U_{P_Q} + U_{E_{P_1}} + U_{P_{G_1}} + U_{P_{G_2}} = -MgL \sin \theta - \frac{k}{2}(x - L \cos \theta)^2 - 2mgL \sin \theta$$

Da cui la lagrangiana

$$\mathcal{L} = T - V = (M + 2m)\dot{x}^2 + \left(\frac{M}{3} + m\right)L^2\dot{\theta}^2 - \left(-MgL \sin \theta - \frac{k}{2}(x - L \cos \theta)^2 - 2mgL \sin \theta\right)$$

che può essere discussa analogamente al caso $M = 0$.

Equazioni di Eulero Lagrange:

$$\begin{cases} 2(M + 2m)\ddot{x} = k(x - L \cos \theta) \\ 2\left(m + \frac{M}{3}\right)L^2\ddot{\theta} = (M + 2m)gL \cos \theta + Lk(x - L \cos \theta) \sin \theta \end{cases}$$

Da cui ricaviamo che i punti di equilibrio sono $(x, \theta) = (0, \pm\frac{\pi}{2})$, entrambi instabili.