Elisabetta Colantoni e Giulia Degni
FM-210 Meccanica Analitica
29 Marzo 2022

Soluzioni Tutorato V

Question 1. Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto) si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ (sistema relativo), la cui origine si muove lungo la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t), 0)$ tale che le sue componenti verificano

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x^2 + 1 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases}$$

L'asse ξ di K si mantiene tangente alla curva $\vec{q}_{O'}(t)$, mentre l'asse ζ si mantiene parallelo all'asse z di κ; all'istante iniziale O' occupa la posizione $\vec{q}_{O'}(0) = (0, -1, 0)$ e gli assi ξ e η sono diretti come gli assi x e y rispettivamente. Un punto P di massa $m = 1$ si muove in K lungo l'asse ξ sotto l'azione di una forza conservativa di energia potenziale

$$V(\xi) = \xi^2 - 1$$

con dato iniziale $\xi(0) = 0$ ed energia meccanica $E = 0$.

(1.1) Scrivere la trasformazione rigida $D : K \to \kappa$ come composizione di una traslazione con una rotazione
$D = C \circ B$ e determinare la forma di C e B.
(1.2) Scrivere la legge del moto nei sistemi K e κ.
(1.3) Determinare la velocità assoluta $\mathbf{v}$ e la velocità relativa $\mathbf{v}'$.
(1.4) Scrivere la componente traslatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v}_0$.
(1.5) Scrivere la componente rotatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v}_T$.
(1.6) Determinare la forza centrifuga e la forza di Coriolis che agiscono sul punto P.

Soluzione

1.1. Trasformazione rigida. Cominciamo con l'osservare che il sistema dinamico planare che individua la curva $\gamma(t)$ ammette una costante del moto data da

$$H(x, y) = y\left(y - x^2 + 1\right)$$

Inoltre la posizione iniziale di O' ci garantisce che $\mathbf{q}_{O'}(t)$ è la curva di livello

$$\Gamma_0 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = H(0, -1) = 0\right\}$$

che possiamo scrivere come $\Gamma_0 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ con

$$\mathcal{C}_1 = \left\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\right\}, \quad \mathcal{C}_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 1\right\}$$

Inoltre il moto di O' si svolgerà esclusivamente lungo la curva

$$\mathcal{C}_2^* = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 1, -1 < x < 1\right\}$$

perché il dato iniziale si trova in $\mathcal{C}_2^*$.

Ma allora sostituendo $y = x^2 - 1$ nella prima equazione del sistema, troviamo

$$\dot{x} = x^2 - 1$$

e risolvendo per separazione di variabili avremo

$$\log\left|\frac{x(t) - 1}{x(t) + 1}\right| = 2t$$

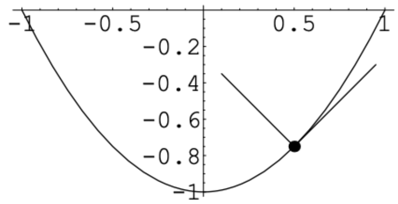

FIGURA 1. Moto del sistema K.

ovvero, tenendo conto che $|x| < 1$,

$$x(t) = \frac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}}$$

e quindi troviamo che

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{q}_{O'}(t) = \left(\frac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}}, \left(\frac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}} \right)^2 - 1, 0 \right)$$

La rotazione può essere rappresentata da una matrice della forma

$$B = B^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove $\theta(t)$ è tale che $\operatorname{tg}\theta(t) = \dot{y}_{O'}/\dot{x}_{O'}$ ma allora

$$\operatorname{tg}\theta(t) = \frac{2x(t)y(t)}{2y(t) - x^2(t) + 1} = \frac{2x(t)\left(x^2(t) - 1\right)}{x^2(t) - 1} = 2x(t) = 2\frac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}}$$

e quindi

$$\theta(t) = \operatorname{arctg}\left(2\frac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}} \right)$$

1.2. Legge del moto nel sistema K. Poiché P si muove esclusivamente lungo l'asse ξ, la legge del moto nel sistema relativo sarà della forma

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Modo 1). Poiché il punto si muove sotto l'azione di un potenziale conservativo a energia nulla, possiamo scrivere la legge

$$\frac{1}{2}\dot{\xi}^2 + V(\xi) = 0$$

ovvero

$$\dot{\xi} = \pm\sqrt{-2V(\xi)}$$

dove il segno dipende dalla scelta della velocità iniziale. Risolvendo per separazione di variabili troviamo

$$\int_0^{\xi} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1 - y^2}} = \pm\sqrt{2}t$$

ovvero

$$\xi(t) = \pm\sin\sqrt{2}t$$

(Modo 2). L'equazione del moto di P è data da

$$\ddot{\xi} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -2\xi$$

la cui soluzione generale è

$$\xi(t) = c_1\cos\sqrt{2}t + c_2\sin\sqrt{2}t$$

con c_1 e c_2 costanti che dipendono dalle condizioni iniziali. Sostituendo il dato iniziale $\xi(0) = 0$ troviamo che deve essere $c_1 = 0$ e quindi $\xi(t) = c_2 \sin\sqrt{2}t$. Dalla legge di conservazione dell'energia inoltre, sappiamo che deve valere

$$\frac{1}{2}\dot{\xi}^2 + V(\xi) = 0$$

ovvero

$$c_2^2 \cos^2\sqrt{2}t + c_2^2 \sin^2\sqrt{2}t - 1 = 0$$

e quindi $c_2 = \pm 1$ e il segno dipende dalla scelta della velocità iniziale, ovvero

$$\xi(t) = \pm \sin\sqrt{2}t$$

Legge del moto in κ. Per determinare la legge del moto nel sistema assoluto basterà applicare la trasformazione D a $\mathbf{Q}(t)$, ovvero

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(t) &= B\begin{pmatrix}\xi(t)\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_{O'}(t)\\y_{O'}(t)\\0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\xi(t)\cos\theta(t) + x_{O'}(t)\\ \xi(t)\sin\theta(t) + y_{O'}(t)\\ 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

1.3. Velocità assoluta. Derivando il vettore $\mathbf{q}(t)$ troviamo

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix}\dot{\xi}(t)\cos\theta(t) - \xi(t)\dot{\theta}(t)\sin\theta(t) + \dot{x}_{O'}(t)\\ \dot{\xi}(t)\sin\theta(t) + \xi(t)\dot{\theta}(t)\cos\theta(t) + \dot{y}_{O'}(t)\\ 0\end{pmatrix}$$

dove ovviamente

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= \pm\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t\\ \dot{\theta}(t) &= \frac{\left(1+e^{2t}\right)^2}{3-2e^{2t}+3e^{4t}}\\ \dot{x}_{O'}(t) &= \left(\frac{1-e^{2t}}{1+e^{2t}}\right)^2 - 1\\ \dot{y}_{O'}(t) &= 2\left(\frac{1-e^{2t}}{1+e^{2t}}\right)^3 - 2\frac{1-e^{2t}}{1+e^{2t}}\end{aligned}$$

Velocità relativa. Derivando il vettore che individua P in K troviamo $\dot{\mathbf{Q}}(t) = (\dot{x}(t), 0, 0)$, perciò la velocità relativa é

$$\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix}\dot{\xi}(t)\cos\theta(t)\\ \dot{\xi}(t)\sin\theta(t)\\ 0\end{pmatrix}$$

1.4. Componente traslatoria. Da $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}$ troviamo $\mathbf{v}_0 = (\dot{x}_{O'}(t), \dot{y}_{O'}(t), 0)$. **1.5. Componente rotatoria.** Poiché l'asse di rotazione del sistema mobile si mantiene parallelo all'asse z di κ, abbiamo $\boldsymbol{\omega}(t) = (0, 0, \dot{\theta}(t))$. Da ciò otteniamo quindi $\mathbf{v}_T = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q} - \mathbf{r}] = (-\dot{\theta}(t)\xi(t)\cos\theta(t), \dot{\theta}(t)\xi(t)\sin\theta(t), 0)$. **1.6. Forza centrifuga.** Dall'esercizio 2 sappiamo che la forza centrifuga è proporzionale al vettore che individua P nel piano $O'\xi\eta$ e più precisamente $F_{\text{cf}} = \dot{\theta}^2(t)\mathbf{Q}(t)$

Forza di Coriolis. Da $F_{\text{cor}} = -2m[\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}]$ unitamente al fatto che, poiché l'asse di rotazione di K si mantiene parallelo all'asse z di κ, si ha $\boldsymbol{\Omega}(t) = \boldsymbol{\omega}(t)$, otteniamo $F_{\text{cor}} = (0, -2\dot{\theta}(t)\dot{\xi}(t), 0)$.

Question 2. Dato un sistema di riferimento $k = Oxyz$ (sistema assoluto) si consideri un sistema mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ la cui origine O' si muove lungo la curva piana $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ tale che le sue componenti verificano

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1 = \gamma_1 - \omega\gamma_2 \\ \dot{\gamma}_2 = \omega\gamma_1 + \gamma_2 \end{cases}$$

dove $\omega > 0$ è una costante; la componente lungo l'asse x del vettore che individua il punto O' varia secondo la legge oraria $x_{O'}(t) = \gamma_1(t)$. L'asse ζ di K si mantiene parallelo all'asse z di k mentre l'asse ξ di K si mantiene tangente a $\gamma(t)$. All'istante iniziale il punto O' occupa la posizione $q_{O'} = (1, 0, 0)$ Un punto P di massa $m = 1$ si muove nel sistema K lungo l'asse ξ sotto l'azione di una molla di costante elastica $\lambda > 0$.

(2.1) Scrivere la trasformazione rigida $D : K \to k$ come composizione di una traslazione con una rotazione $D = C \circ B$ e determinare la forma di C e B.

(2.2) Scrivere la legge del moto nei sistemi k e K.

(2.3) Determinare la velocità assoluta v e la velocità relativa v'.

(2.4) Scrivere la componente traslatoria della velocità di trascinamento v_0.

(2.5) Scrivere la componente rotatoria della velocità di trascinamento v_T.

(2.6) Determinare la forza centrifuga che agisce sul punto P.

(2.7) Determinare la forza di Coriolis che agisce sul punto P.

Soluzione

(2.1)Trasformazione rigida. Cerchiamo intanto la legge del moto di O'. Per individuare la curva lungo cui si muove O' notiamo che le sue componenti sono soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{z} = Az \\ z(0) = (1, 0) \end{cases} \quad z \in \mathbb{R}^2 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ \omega & 1 \end{pmatrix}$$

e tale sistema, come sappiamo, ha per soluzione

$$z(t) = z(0)\exp(At) \quad \exp(At) = \begin{pmatrix} e^t \cos\omega t & -e^t \sin\omega t \\ e^t \sin\omega t & e^t \cos\omega t \end{pmatrix}$$

e quindi $\mathbf{r}(t) = \gamma(t) = (e^t \cos\omega t, e^t \sin\omega t, 0)$ se vista come curva immersa in $\mathbb{R}^3$. L'angolo di rotazione è dato da

$$\operatorname{tg}\theta(t) = \frac{\dot{\gamma}_2}{\dot{\gamma}_1} = \frac{\cos\omega t - \omega\sin\omega t}{\sin\omega t + \omega\cos\omega t}$$

e quindi

$$\theta(t) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos\omega t - \omega\sin\omega t}{\sin\omega t + \omega\cos\omega t}\right)$$

Pertanto possiamo scrivere la trasformazione rigida come

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \cos\omega t \\ e^t \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove

$$B = B^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2.2)Legge del moto in K. Poiché P si muove lungo l'asse ξ, la legge del moto in K sarà del tipo $\mathbf{Q} = (\xi(t), 0, 0)$ con $\xi(t)$ che verifica l'equazione $\ddot{\xi} + \lambda\xi = 0$ e quindi $\xi(t) = \xi_0 \cos\sqrt{\lambda}t + \dot{\xi}_0 \sin\sqrt{\lambda}t$ dove ξ_0 è la coordinata lungo l'asse ξ della posizione iniziale di P e $\dot{\xi}_0$ è la sua velocità iniziale. Indichiamo $\alpha = \sqrt{\lambda}$. Legge del moto in k. Per determinare la legge del moto nel sistema assoluto basterà applicare la trasformazione D a $\mathbf{Q}(t)$. Pertanto vale

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) =& B \begin{pmatrix} \xi(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \cos\omega t \\ e^t \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} \xi(t)\cos\theta(t) \\ \xi(t)\sin\theta(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \cos\omega t \\ e^t \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} \xi(t)\cos\theta(t) + e^t\cos\omega t \\ \xi(t)\sin\theta(t) + e^t \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2.3) Velocità assoluta. Derivando il vettore $\mathbf{q}(t)$ troviamo

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \dot{\xi}(t)\cos\theta(t) - \xi(t)\dot{\theta}(t)\sin\theta(t) + e^t(\cos\omega t - \omega\sin\omega t) \\ \dot{\xi}(t)\sin\theta(t) + \xi(t)\dot{\theta}(t)\cos\theta(t) + e^t(\sin\omega t + \omega\cos\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove $\dot{\xi}(t) = \dot{\xi}_0\alpha\cos\alpha t - \xi_0\alpha\sin\alpha t$ e

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{\omega(1+\omega)}{1+\omega+\omega^2 - \omega(1+\omega)\cos(2\omega t) - \omega\sin(2\omega t)}$$

Velocità relativa Derivando il vettore che individua P nel sistema K troviamo $\dot{\mathbf{Q}} = (\dot{\xi}(t), 0, 0)$ perciò la velocità relativa è

$$\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \dot{\xi}(t)\cos\theta(t) \\ \dot{\xi}(t)\sin\theta(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2.4) Componente traslatoria. Da $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}$ troviamo $\mathbf{v}_0 = (e^t(\cos\omega t - \sin\omega t), e^t(\sin\omega t + \cos\omega t), 0)$.

(2.5) Componente rotatoria. Poiché l'asse di rotazione del sistema è parallelo all'asse z di k, abbiamo $\omega(t) = (0, 0, \dot{\theta}(t))$. Da ciò otteniamo quindi $\mathbf{v}_T = [\omega, \mathbf{q} - \mathbf{r}] = (-\dot{\theta}(t)\xi(t)\sin\theta(t), \dot{\theta}(t)\xi(t)\cos\theta(t), 0)$.

(2.6) Forza centrifuga. Sappiamo che $F_{\text{cf}} = -[\mathbf{\Omega}, [\mathbf{\Omega}, \mathbf{Q}]]$ dove $\mathbf{\Omega} = B\omega$ e quindi, nel nostro caso avremo $\mathbf{\Omega}(t) = \omega(t)$. Perciò otteniamo $F_{cf} = \left(\dot{\theta}^2(t)\xi(t), 0, 0\right)$

(2.7) Forza di Coriolis. Da $F_{\text{cor}} = -2[\mathbf{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}]$ troviamo $F_{\text{cor}} = (0, -2\dot{\xi}(t)\dot{\theta}(t), 0)$.

Question 3. Dato un sistema di riferimento $k = Oxyz$ (sistema di riferimento fisso o assoluto) si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ la cui origine O' si muove lungo la circonferenza $\mathcal{C}'$ di centro O e raggio $r = 2$. La componente lungo l'asse x che individua il punto O' varia secondo la legge oraria $x_{O'}(t) = 2\cos\omega_1 t$ con $\omega_1 > 0$ costante. L'asse ζ di K si mantiene parallelo all'asse z di k mentre l'asse ξ di K si mantiene ortogonale a $\mathcal{C}$. All'istante iniziale il punto O' occupa la posizione $\mathrm{q}' = (2, 0, 0)$ Un punto P di massa $m = 1$ si muove nel sistema K lungo l'asse ξ secondo la legge oraria $\xi(t) = \cos t$.

(3.1) Scrivere la trasformazione rigida $D : K \to k$ come composizione di una traslazione con una rotazione $D = C \circ B$ e determinare la forma di C e B.

(3.2) Scrivere la legge del moto nei sistemi k e K.

(3.3) Determinare la velocità assoluta v e la velocità relativa v'.

(3.4) Scrivere la componente traslatoria della velocità di trascinamento v_0.

(3.5) Scrivere la componente rotatoria della velocità di trascinamento v_T.

(3.6) Determinare la forza centrifuga che agisce sul punto P.

(3.7) Determinare la forza di Coriolis che agisce sul punto P.

Soluzione

(3.1) Trasformazione rigida. Il vettore che individua O' nel sistema k è dato da $\mathbf{r}(t) = (2\cos\omega_1 t, 2\sin\omega_1 t, 0)$, mentre la rotazione può essere rappresentata da una matrice della forma

$$B = B^{(3)}(t) \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove $\theta(t)$ è l'angolo di rotazione. Notiamo che il versore $\hat{\xi}$, essendo ortogonale alla circonferenza, è diretto come $\mathbf{r}(t)$ e quindi $\theta(t) = \omega_1 t$ perciò la trasformazione rigida è data da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cos\omega_1 t \\ 2\sin\omega_1 t \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3.2) Legge del moto. Poiché P si muove in K lungo l'asse ξ, la legge del moto in K sarà semplicemente $\mathbf{Q}(t) = (\xi(t), 0, 0) = (\cos t, 0, 0)$. Per ottenere la legge del moto in k basterà applicare la trasformazione D a $\mathbf{Q}$, ottenendo quindi

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cos\omega_1 t \\ 2\sin\omega_1 t \\ 0 \end{pmatrix} & \\ &= \begin{pmatrix} \cos t\cos\omega_1 t \\ \cos t\sin\omega_1 t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cos\omega_1 t \\ 2\sin\omega_1 t \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2+\cos t)\cos\omega_1 t \\ (2+\cos t)\sin\omega_1 t \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3.3) Velocità assoluta. Sappiamo che la velocità assoluta è $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}$, e quindi basta semplicemente derivare il vettore che individua P nel sistema k ottendendo

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -\sin t\cos\omega_1 t - \omega_1(2+\cos t)\sin\omega_1 t \\ -\sin t\sin\omega_1 t + \omega_1(2+\cos t)\cos\omega_1 t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Velocità relativa. Derivando il vettore che individua P nel sistema K, otteniamo $\dot{\mathbf{Q}} = (-\sin t, 0, 0)$ perciò la velo cità relativa è data da

$$\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} -\sin t \cos \omega_1 t \\ -\sin t \sin \omega_1 t \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3.4) Componente traslatoria. Da $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}$ troviamo $\mathbf{v}_0 = (-\omega_1 \sin \omega_1 t, \omega_1 \cos \omega_1 t, 0)$.

(3.5) Componente rotatoria. Sappiamo che $\mathbf{v}_T = [\omega, \mathbf{q} - \mathbf{r}]$, con $|\omega| = \omega_1\cdot$ D'altra parte, poiché l'asse di rotazione del sistema è parallelo all'asse z di k, avremo $\omega(t) = (0, 0, \omega_1)$. Da ciò otteniamo quindi

$$\mathbf{v}_T = (-\omega_1 \cos t \sin \omega_1 t, \omega_1 \cos t \cos \omega_1 t, 0)$$

(3.6) Forza centrifuga. Sappiamo che $F_{cf} = -[\Omega, [\Omega, \mathbf{Q}]]$ dove $\Omega = B\omega$ e quindi, nel nostro caso, $\Omega = \omega$. Perciò otteniamo $F_{cf} = (\omega_1^2 \cos t, 0) = \omega_1^2 \mathbf{Q}(t)$.

(3.7) Forza di Coriolis. Da $F_{\text{cor}} = -2[\mathbf{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}]$ troviamo $F_{\text{cor}} = (0, 2\omega_1 \sin t, 0)$.