Elisabetta Colantoni e Giulia Degni
FM-210 Meccanica Analitica
31 maggio 2022

Tutorato X

Question 1. Data la lagrangiana

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + q\dot{q} + 3q^2$$

scrivere la corrispondente Hamiltoniana e risolvere le equazioni di Hamilton associate.

Question 2. Dire per quali valori di α e β la seguente trasformazione è canonica

$$\begin{cases} P = \alpha p e^{\beta q} \\ Q = \frac{1}{\alpha} e^{-\beta q} \end{cases}$$

Trovare una trasformazione generatrice in corrispondenza di tali valori.

Question 3. Si consideri la seguente trasformazione di coordinate:

$$\begin{cases} Q = -p\sqrt{\frac{1-qp}{1+qp}} \\ P = q\sqrt{\frac{1+qp}{1-qp}} \end{cases}$$

(1) Si calcolino le derivate parziali di Q e P rispetto a q e p, e si dimostri che la trasformazione è canonica verificando che si conservano le parentesi di Poisson fondamentali.

(2) Si dimostri che $qp = -QP$ e si utilizzi tale risultato per ricavare q in termini di Q e P a partire dall'espressione di P in termini di q e p.

(3) Esplicitando anche p in funzione di Q e P, si calcoli la trasformazione inversa della trasformazione data.

(4) Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F(q,P)$.

(5) Si consideri il sistema hamiltoniano descritto dall'hamiltoniana $H(q,p) = q^2(1+qp)(1-qp)^{-1}$: si calcoli l'hamiltoniana nelle variabili (Q,P).

(6) Si usi il risultato del punto precedente per determinare esplicitamente la soluzione $(q(t),p(t))$ con dati iniziali $(q(0),p(0)) = (1,0)$.

Question 4. Si considerino le equazioni del moto

$$\begin{cases} \dot{q} = q^2 p \\ \dot{p} = -p^2 q - 1/q \end{cases}$$

per $q > 0$ e $p \in \mathbb{R}$

(1) Si riconosca che tale sistema di equazioni è Hamiltoniano e si determini l'Hamiltoniana corrispondente.

(2) Si calcoli la trasformazione canonica associata alla funzione generatrice di seconda specie $G(q,P) = P\log q$

(3) Si determini l'Hamiltoniana nelle nuove variabili Q,P. Si calcolino e risolvano le corrispondenti equazioni di Hamilton.

(4) Si usi la trasformazione determinata sopra, nonché la soluzione delle equazioni del moto nelle variabili (Q,P), per risolvere le equazioni del moto originali per le variabili (q,p), in corrispondenza dei dati iniziali $q(0) = p(0) = 1$. Si verifichi esplicitamente che la soluzione trovata risolve le equazioni del moto originali.