Elisabetta Colantoni e Giulia Degni
FM-210 Meccanica Analitica
6 Giugno 2022

Tutorato XI

Question 1. Il sistema di figura è disposto in un piano verticale. L'asta rigida omogenea AB ha massa m, lunghezza $\ell = 2r$ ed è incernierata in A alla periferia del disco di massa $M = 3m$ e raggio r, che ruota attorno alla cerniera fissa O, diametralmente opposta ad A. L'estremo B dell'asta scorre sull'asse x, ed è collegato al baricentro G del disco mediante una molla con costante elastica nota k e lunghezza a riposo trascurabile. Si assuma come coordinata lagrangiana l'angolo ϑ di figura, e si suppongano tutti i vincoli perfetti.

1. Determinare le configurazioni di equilibrio ϑ_e del sistema e studiarne la stabilità.
2. Si supponga che il sistema parta dalla quiete nella configurazione iniziale $\vartheta_0 = \pi/2$. Calcolare la velocità angolare dell'asta AB quando il sistema raggiunge la configurazione in cuiv $\vartheta = \pi/4$.
3. Determinare il momento cinetico p coniugato all'angolo ϑ e scrivere le equazioni di Hamilton del sistema.

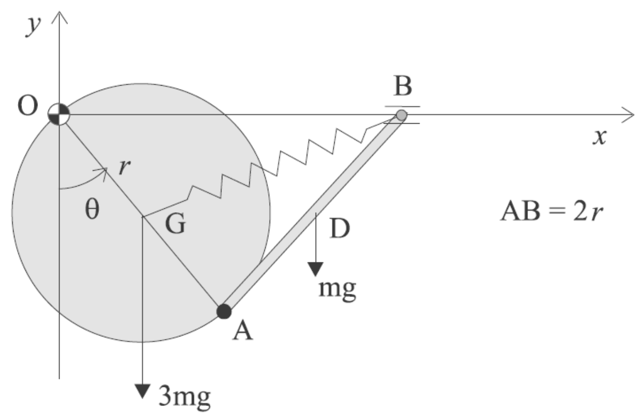

FIGURA 1

Question 2. Si ha un sistema dinamico con Hamiltoniana

$$H(q,p) = \sin q \left(p^2 \sin^3 q + \frac{\cos q}{\sin^2 q} \right) + \text{ cost.}$$

Applicando alle variabili (q,p) la trasformazione canonica generata dalla funzione

$$F_2(q,\tilde{p}) = -\tilde{p} \cdot \cot q,$$

scrivere le equazioni canoniche nelle nuove variabili $(\tilde{q},\tilde{p})$ e risolverle determinando il moto del sistema soddisfacente le condizioni iniziali: $q_0 = -\pi/2, p_0 = 2$.

Question 3. Nel sistema in figura, che è disposto in un piano verticale, la sbarretta rigida AB di lunghezza ℓ e massa m è incernierata, ad un terzo della sua lunghezza, nell'origine del sistema di riferimento inerziale $O(x,y)$. Ad essa sono applicate: una coppia di momento costante M, e una molla con costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile, che collega l'estremo A ad un punto materiale P di massa m_P scorrevole senza attrito sull'asse x. Al punto P è applicata una forza costante $\vec{F} = F\vec{\imath}$.

1. Calcolare la posizione di equilibrio x_e del punto P e il valore che deve avere il momento M della coppia, perchè la sbarretta si trovi in equilibrio per $\vartheta_e = \pi$. Determinare quindi la condizione che deve essere soddisfatta dalla forza F per assicurare la stabilità della configurazione di equilibrio $q_e = (\pi, x_e)$.
2. Calcolare la Lagrangiana del sistema e scrivere le equazioni del moto.
3. Ricavati i momenti cinetici p_ϑ e p_x coniugati alle variabili lagrangiane (ϑ, x), determinare l'Hamiltoniana del sistema e scrivere le equazioni canoniche del moto.
4. Si supponga ora che il moto del punto P sia noto, e descritto da $x(t) = R\sin t + x_0$. Calcolare il momento cinetico p coniugato all'unica coordinata lagrangiana ϑ del sistema dinamico così modificato, e determinarne la funzione Hamiltoniana $H(\vartheta, p, t)$.

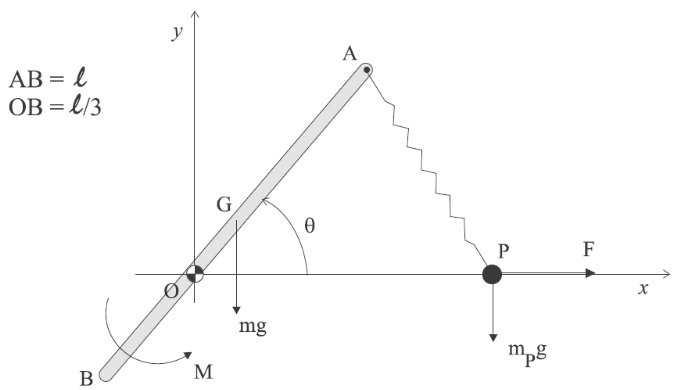

Figura 2