Elisabetta Colantoni e Giulia Degni
FM-210 Meccanica Analitica
6 Giugno 2022

Tutorato XI

Question 1. Il sistema di figura è disposto in un piano verticale. L'asta rigida omogenea AB ha massa m, lunghezza $\ell = 2r$ ed è incernierata in A alla periferia del disco di massa $M = 3m$ e raggio r, che ruota attorno alla cerniera fissa O, diametralmente opposta ad A. L'estremo B dell'asta scorre sull'asse x, ed è collegato al baricentro G del disco mediante una molla con costante elastica nota k e lunghezza a riposo trascurabile. Si assuma come coordinata lagrangiana l'angolo ϑ di figura, e si suppongano tutti i vincoli perfetti.

1. Determinare le configurazioni di equilibrio ϑ_e del sistema e studiarne la stabilità.
2. Si supponga che il sistema parta dalla quiete nella configurazione iniziale $\vartheta_0 = \pi/2$. Calcolare la velocità angolare dell'asta AB quando il sistema raggiunge la configurazione in cuiv $\vartheta = \pi/4$.
3. Determinare il momento cinetico p coniugato all'angolo ϑ e scrivere le equazioni di Hamilton del sistema.

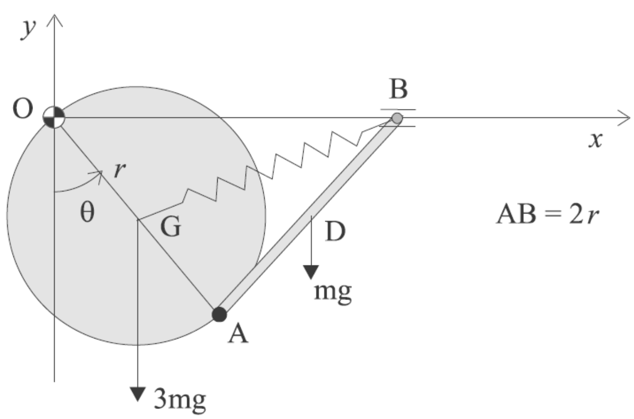

FIGURA 1

Soluzione

1) Le forze attive agenti sul sistema sono tutte conservative, ed ammettono potenziale

$$U = -3mgy_G - mgy_D - \frac{k}{2}\overline{BG}^2$$

Poichè:

$$y_G = y_D = -r\cos\vartheta, \quad \overline{BG}^2 = 9r^2\sin^2\vartheta + r^2\cos^2\vartheta$$

si ricava

$$U(\vartheta) = 4mgr\cos\vartheta - \frac{1}{2}kr^2\left(1 + 8\sin^2\vartheta\right) + \text{ cost}$$

Le configurazioni di equilibrio sono i punti di stazionarietà di $U(\vartheta)$, e si ricavano ricercando in $[-\pi, \pi]$ le radici reali di

$$\frac{dU}{d\vartheta} = -4r\sin\vartheta(mg + 2kr\cos\vartheta) = 0$$

Esse sono:

Poichè queste configurazioni sono stabili se in esse l'energia potenziale $V(\vartheta) = -U(\vartheta)$ ha un minimo locale, si calcola la derivata seconda:

$$U''(\vartheta) = -4r\cos\vartheta(mg + 2kr\cos\vartheta) + 8kr^2\sin^2\vartheta$$

che nei punti di stazionarietà vale:

Ne segue che:

- $\vartheta_e^{(1)} = 0$ è sempre stabile;
- $\vartheta_e^{(2)} = \pi$ è stabile se $mg < 2kr$ e instabile se $mg > 2kr$;
- $\vartheta_e^{(3,4)}$, se esistono, sono instabili.

b) L'energia cinetica del sistema vale:

$$T = T^{\text{disco}} + T^{asta} = \frac{1}{2}I_O\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}mv_D^2 + \frac{1}{2}I_D\dot{\varphi}^2$$

con:

$$\vartheta_e^{(1)} = 0, \quad \vartheta_e^{(2)} = \pi$$

$$\vartheta_e^{(3)} = \arccos\left(-\frac{mg}{2kr}\right), \quad \vartheta_e^{(4)} = -\vartheta_e^{(3)}, \quad \text{reali se } mg < 2kr.$$

$$U''(0) = -4r(mg + 2kr) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{minimo di}\, V(\vartheta)$$

$$U''(\pi) = 4r(mg - 2kr)\begin{cases} < 0 & \text{se } mg < 2kr \Rightarrow \text{minimo di}\, V(\vartheta) \\ > 0 & \end{cases} \Rightarrow \text{se}\, mg > 2kr \quad \Rightarrow \quad \text{massimo di}\, V(\vartheta)$$

$$U''\left(\vartheta_e^{(3,4)}\right) = 8kr^2\sin^2\vartheta_e^{(3,4)} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{massimo di}\, V(\vartheta).$$

$$\varphi = \pi/2 - \vartheta \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}^2 = \dot{\vartheta}^2$$

$$\vec{v}_D = 3r\cos\vartheta\dot{\vartheta}\vec{\imath} + r\sin\vartheta\dot{\vartheta}\vec{\jmath} \quad \Rightarrow \quad v_D^2 = r^2\left(1 + 8\cos^2\vartheta\right)\dot{\vartheta}^2$$

$$I_O = I_G + 3mr^2 = \frac{9}{2}mr^2; \quad I_D = \frac{1}{12}m(2r)^2$$

e sostituendo si ricava

$$T(\vartheta, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{9}{2} + 1 + 8\cos^2\vartheta + \frac{1}{3}\right)\dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{35}{6} + 8\cos^2\vartheta\right)\dot{\vartheta}^2 \equiv \frac{1}{2}a(\vartheta)\dot{\vartheta}^2$$

Poichè il sistema è conservativo, si può applicare l'integrale primo: $T_0 - U_0 = T_1 - U_1$, in cui l'energia cinetica T e la funzione potenziale U, se calcolati nell'istante iniziale e per $\vartheta = \pi/4$, valgono rispettivamente

$$\begin{array}{ll} T_0 = T(\pi/2, 0) = 0, & U_0 = U(\pi/2) = -\frac{9}{2}kr^2 + \text{ cost} \\ T_1 = T\left(\pi/4, \dot{\vartheta}_1\right) = \frac{59}{12}mr^2\dot{\vartheta}_1^2, & U_1 = U(\pi/4) = 2\sqrt{2}mgr - \frac{5}{2}kr^2 + \text{ cost} \end{array}$$

Sostituendo nell'integrale primo dell'energia si ottiene:

$$\frac{59}{12}mr^2\dot{\vartheta}_1^2 - 2\sqrt{2}mgr + \frac{5}{2}kr^2 = \frac{9}{2}kr^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vartheta}_1 = -2\sqrt{\frac{6(\sqrt{2}mg + kr)}{59mr}}$$

3) Il momento cinetico coniugato a ϑ vale

$$p =: \frac{dL}{d\dot{\vartheta}} = \frac{d(T + V)}{d\dot{\vartheta}} = a(\vartheta)\dot{\vartheta}$$

Ricavando $\dot{\vartheta}(\vartheta, p)$ da quest'ultima, si calcola la Hamiltoniana del sistema:

$$\begin{aligned} H(\vartheta, p) &=: p\dot{\vartheta}(\vartheta, p) - [T(\vartheta, \dot{\vartheta}(\vartheta, p)) + V(\vartheta)] \\ &= \frac{p^2}{2a(\vartheta)} - 4mgr\cos\vartheta + \frac{1}{2}kr^2\left(1 + 8\sin^2\vartheta\right) + cost \end{aligned}$$

che si utilizza per ottenere le seguenti equazioni canoniche del moto:

$$\dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{a(\vartheta)} = \frac{p}{mr^2\,(35/6 + 8\cos^2\vartheta)}$$
$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = -\frac{8p^2 \sin\vartheta\cos\vartheta}{mr^2\,(35/6 + 8\cos^2\vartheta)^2} - 4r\sin\vartheta(mg + 2kr\cos\vartheta)$$

Question 2. Si ha un sistema dinamico con Hamiltoniana

$$H(q,p) = \sin q \left(p^2 \sin^3 q + \frac{\cos q}{\sin^2 q} \right) + \text{ cost.}$$

Applicando alle variabili (q,p) la trasformazione canonica generata dalla funzione

$$F_2(q,\tilde{p}) = -\tilde{p}\cdot\cot q,$$

scrivere le equazioni canoniche nelle nuove variabili $(\tilde{q},\tilde{p})$ e risolverle determinando il moto del sistema soddisfacente le condizioni iniziali: $q_0 = -\pi/2, p_0 = 2$.

Soluzione

Le formule di trasformazione canonica per la funzione generatrice $F_2 = -\tilde{p}\cdot\cot q$ forniscono:

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = \frac{\tilde{p}}{\sin^2 q}; \quad \tilde{q} = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}} = -\cot q$$

Da queste si ricavano le espressioni esplicite della trasformazione diretta e della sua inversa:

$$\begin{cases} \tilde{q} = -\cot q \\ \tilde{p} = p\sin^2 q \end{cases} \begin{cases} q = \arctan(-1/\tilde{q}) \\ p = \tilde{p}\,(1+\tilde{q}^2) \end{cases}$$

e poichè la trasformazione è completamente canonica, la nuova Hamiltoniana $\tilde{H}(\tilde{q},\tilde{p})$ si ricava applicando la trasformazione inversa alla Hamiltoniana nota $H(q,p)$. Si ottiene in tal modo:

$$\tilde{H}(\tilde{q},\tilde{p}) = \tilde{p}^2 - \tilde{q} + \cos t$$

da cui le semplici equazioni canoniche

$$\frac{d\tilde{q}}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} = 2\tilde{p}$$
$$\frac{d\tilde{p}}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} = 1$$

La loro soluzione è

$$\tilde{q}(t) = t^2 + 2\tilde{p}_0 t + \tilde{q}_0, \quad \tilde{p}(t) = t + \tilde{p}_0$$

con $\tilde{q}_0, \tilde{p}_0$ condizioni iniziali che, tenendo conto dei dati assegnati a q_0, p_0 e della trasformazione diretta, valgono:

$$\tilde{q}_0 = -\cot q_0 = 0; \quad \tilde{p}_0 = p_0\sin^2 q_0 = 2\sin^2(-\pi/2) = 2$$

In conclusione si ottiene:

$$\tilde{q}(t) = t^2 + 4t, \quad \tilde{p}(t) = t + 2$$

ossia anche, in termini delle variabili canoniche originarie:

$$q(t) = \arctan\left(-\frac{1}{t^2+4t}\right); \quad p(t) = (t+2)\left[1 + t^2(t+4)^2\right]$$

Question 3. Nel sistema in figura, che è disposto in un piano verticale, la sbarretta rigida AB di lunghezza ℓ e massa m è incernierata, ad un terzo della sua lunghezza, nell'origine del sistema di riferimento inerziale $O(x,y)$. Ad essa sono applicate: una coppia di momento costante M, e una molla con costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile, che collega l'estremo A ad un punto materiale P di massa m_P scorrevole senza attrito sull'asse x. Al punto P è applicata una forza costante $\vec{F} = F\vec{\imath}$.

1. Calcolare la posizione di equilibrio x_e del punto P e il valore che deve avere il momento M della coppia, perchè la sbarretta si trovi in equilibrio per $\vartheta_e = \pi$. Determinare quindi la condizione che deve essere soddisfatta dalla forza F per assicurare la stabilità della configurazione di equilibrio $q_e = (\pi, x_e)$.
2. Calcolare la Lagrangiana del sistema e scrivere le equazioni del moto.
3. Ricavati i momenti cinetici p_ϑ e p_x coniugati alle variabili lagrangiane (ϑ, x), determinare l'Hamiltoniana del sistema e scrivere le equazioni canoniche del moto.
4. Si supponga ora che il moto del punto P sia noto, e descritto da $x(t) = R\sin t + x_0$. Calcolare il momento cinetico p coniugato all'unica coordinata lagrangiana ϑ del sistema dinamico così modificato, e determinarne la funzione Hamiltoniana $H(\vartheta, p, t)$.

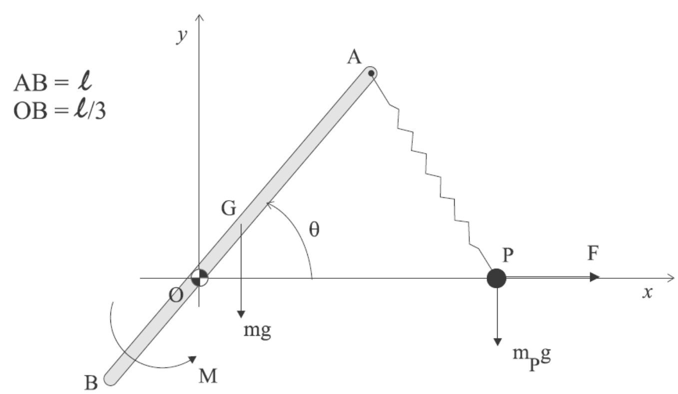

FIGURA 2

Soluzione

1. Calcolati il quadrato della elongazione della molla e la quota del baricentro G :

$$(AP)^2 = x^2 + \frac{4}{9}\ell^2 - \frac{4}{3}\ell x\cos\vartheta; \quad y_G = \overline{OG}\sin\vartheta = \frac{\ell}{6}\sin\vartheta$$

il potenziale delle forze attive risulta:

$$U(\vartheta, x) = -\frac{mg\ell}{6}\sin\vartheta - \frac{k}{2}\left(x^2 + \frac{4}{9}\ell^2 - \frac{4}{3}\ell x\cos\vartheta\right) + M\vartheta + Fx + \text{ cost}$$

ed ha derivate parziali:

$$U'_\vartheta(\vartheta, x) = -\frac{mg\ell}{6}\cos\vartheta - \frac{2k\ell}{3}x\sin\vartheta + M$$
$$U'_x(\vartheta, x) = -kx + \frac{2k\ell}{3}\cos\vartheta + F$$

Annullandole entrambe e ponendo $\vartheta = \vartheta_e = \pi$ si ricava subito:

$$M = -\frac{mg\ell}{6}; \quad x_e = \frac{F}{k} - \frac{2\ell}{3}.$$

Le derivate seconde del potenziale, calcolate nella configurazione di equilibrio $q_e = (-\pi, x_e)$, valgono:

$$
\begin{aligned}
U"_{\vartheta\vartheta}(q_e) &= \frac{mg\ell}{6}\sin\vartheta_e - \frac{2k\ell}{3}x_e\cos\vartheta_e = \frac{2k\ell}{3}\left(\frac{F}{k}-\frac{2\ell}{3}\right)\\
U_{xx}(q_e) &= -k<0\\
U_{\vartheta x}(q_e) &= -\frac{2k\ell}{3}\sin\vartheta_e = 0
\end{aligned}
$$

per cui $U''_{\vartheta\vartheta}(q_e)$ e $U''_{xx}(q_e) = -k$ coincidono con gli autovalori della matrice Hessiana. Affinchè entrambi gli autovalori siano negativi (condizione affichè $U(\vartheta, x)$ abbia un massimo in q_e), occorre che $F < 2k\ell/3$. Se è soddisfatta questa condizione, l'energia potenziale $V = -U$ ha un minimo, e q_e è stabile.

2. Calcolata l'energia cinetica del sistema, che vale

$$
T(\dot{\vartheta}, \dot{x}) = \frac{1}{2}I_O\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}m_P v_P^2 = \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{9}\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}m_P\dot{x}^2
$$

si ricava la Lagrangiana:

$$
\begin{aligned}
L(\vartheta, x, \dot{\vartheta}, \dot{x}) =& T + U = \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{9}\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}m_P\dot{x}^2\\
&- \frac{mg\ell}{6}\sin\vartheta - \frac{k}{2}\left(x^2 + \frac{4}{9}\ell^2 - \frac{4}{3}\ell x\cos\vartheta\right) + M\vartheta + Fx + \mathrm{cost}
\end{aligned}
$$

dalla quale si ottengono le equazioni del moto:

$$
\begin{aligned}
\ddot{\vartheta} + \frac{3g}{2\ell}\cos\vartheta + \frac{6k}{\ell}x\sin\vartheta &= \frac{9M}{m\ell^2}\\
m_P\ddot{x} + kx - \frac{2}{3}k\ell\cos\vartheta &= F.
\end{aligned}
$$

3. I momenti cinetici valgono

$$
p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}} = \frac{m\ell^2}{9}\dot{\vartheta}, \quad p_x = \frac{\partial L}{\partial\dot{x}} = m\dot{x}
$$

e l'energia del sistema conservativo, espressa in forma canonica, è la funzione Hamiltoniana:

$$
H(\vartheta, x, p_\vartheta, p_x) = T - U = \frac{9p_\vartheta^2}{2m\ell^2} + \frac{p_x^2}{2m_P} - U(\vartheta, x)
$$

Conoscendo quest'ultima, si ottengono le equazioni canoniche del moto:

$$
\begin{aligned}
\dot{\vartheta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\vartheta} = 9p_\vartheta/m\ell^2\\
\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x/m\\
\dot{p}_\vartheta &= -\frac{\partial H}{\partial\vartheta} = U'_\vartheta = M - \frac{mg\ell}{6}\cos\vartheta - \frac{2k\ell}{3}x\sin\vartheta\\
\dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = U'_x = F - kx + \frac{2k\ell}{3}\cos\vartheta
\end{aligned}
$$

4. Se il moto del punto P è assegnato, e vale $x(t) = R\sin t + x_0$, si ha a che fare con un nuovo sistema meccanico con un solo grado di libertà, individuato dalla coordinata lagrangiana ϑ, e soggetto a vincoli dipendenti dal tempo. Il potenziale generalizzato del sistema di forze applicate si scrive:

$$
U(\vartheta, t) = -\frac{mg\ell}{6}\sin\vartheta - \frac{k}{2}\left(x^2(t) + \frac{4}{9}\ell^2 - \frac{4\ell x(t)}{3}\cos\vartheta\right) + M\vartheta + Fx + \cos t
$$

e l'energia cinetica vale:

$$T(\dot{\vartheta}, t) = \frac{1}{18} m\ell^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} m_P R^2 \cos^2 t$$

Se ne deduce la nuova Lagrangiana

$$L(\vartheta, \dot{\vartheta}, t) = \frac{1}{18} m\ell^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} m_P R^2 \cos^2 t + U(\vartheta, t)$$

e il momento cinetico coniugato all'unica coordinata libera ϑ, che rimane invariato:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{m\ell^2}{9} \dot{\vartheta}$$

Poichè il nuovo sistema dinamico non è più conservativo, la sua Hamiltoniana non è più l'espressione canonica di $T - U$, perchè l'energia generalizzata $\mathcal{H}(\vartheta, \dot{\vartheta}, t)$ non è più una costante del moto. Per la sua definizione, essa vale:

$$\mathcal{H} = p\dot{\vartheta} - L(\vartheta, \dot{\vartheta}, t) = \frac{m\ell^2}{9} \dot{\vartheta}^2 - (T + U) = \frac{m\ell^2}{18} \dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2} m_P R^2 \cos^2 t - U(\vartheta, t)$$

ed esprimendola in funzione del momento cinetico se ne ricava la sua forma canonica, ovvero la Hamiltoniana:

$$H(\vartheta, p, t) = \frac{9p^2}{2m\ell^2} - \frac{1}{2} m_P R^2 \cos^2 t - U(\vartheta, t)$$