Elisabetta Colantoni e Giulia Degni
FM-210 Meccanica Analitica
31 maggio 2022

# Tutorato X

**Question 1.** Data la lagrangiana

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + q\dot{q} + 3q^2$$

scrivere la corrispondente Hamiltoniana e risolvere le equazioni di Hamilton associate.

**Soluzione.** Il momento coniugato alla variabile $q$ è

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

e quindi $\dot{q} = p - q$. Pertanto $H(p,q) = p\dot{q} - L = \frac{1}{2}p^2 - pq - \frac{5}{2}q^2$.
Le corrispondenti equazioni di Hamilton sono

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p - q \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = p + 5q \end{cases}$$

Derivando la prima equazione rispetto al tempo si ha:

$$\ddot{q} = \dot{p} - \dot{q} = 6q$$

la cui soluzione è

$$q(t) = A_1 e^{\sqrt{6}t} + A_2 e^{-\sqrt{6}t}$$

dove $A_1$ e $A_2$ sono costanti arbitrarie. Pertanto da $p = q + \dot{q}$ si ricava

$$p(t) = \left(A_1 + \sqrt{6}A_1\right) e^{\sqrt{6}t} + \left(A_2 - \sqrt{6}A_2\right) e^{-\sqrt{6}t}.$$

**Question 2.** Dire per quali valori di $\alpha$ e $\beta$ la seguente trasformazione è canonica

$$\begin{cases} P = \alpha p e^{\beta q} \\ Q = \frac{1}{\alpha} e^{-\beta q} \end{cases}$$

Trovare una trasformazione generatrice in corrispondenza di tali valori.

**Soluzione.** Usiamo le parentesi di Poisson per verificare la canonicità della trasformazione; in particolare, poiché la trasformazione è unidimensionale basta verificare la condizione

$$\{Q,P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1$$

Pertanto si ha

$$-\frac{\beta}{\alpha} e^{-\beta q} \alpha e^{\beta q} = 1$$

che è soddisfatta per $\beta = -1$ e $\alpha \neq 0$. Dunque la trasformazione diventa

$$\begin{cases} P = \alpha p e^{-q} \\ Q = \frac{1}{\alpha} e^{q} \end{cases}$$

Cerchiamo una trasformazione generatrice $F = F(q,P)$, le cui equazioni di trasformazione sono:

$$\begin{cases} p = \frac{\partial F}{\partial q} \\ Q = \frac{\partial F}{\partial P} \end{cases}$$

Dalla (1) si ha:

$$\begin{cases} p = \frac{P}{\alpha} e^q \\ Q = \frac{1}{\alpha} e^q \end{cases}$$

Pertanto deve risultare

$$\frac{\partial F}{\partial q} = \frac{P}{\alpha} e^q$$

Ossia $F(q,P) = \frac{P}{\alpha} + f(P)$, dove $f(p)$ è una funzione della sola $P$. Analogamente dalla relazione

$$\frac{\partial F}{\partial P} = \frac{1}{\alpha} e^q$$

si trova $F(q,P) = \frac{P}{\alpha} e^q + g(q)$ dove $g(q)$ dipende dalla sola variabile $q$. Confrontando le due espressioni per la funzione generatrice si ottiene $f(P) = g(q) = 0$ e quindi

$$F(q,P) = \frac{P}{\alpha} e^q$$

**Question 3.** Si consideri la seguente trasformazione di coordinate:

$$\begin{cases} Q = -p\sqrt{\frac{1-qp}{1+qp}} \\ P = q\sqrt{\frac{1+qp}{1-qp}} \end{cases}$$

(1) Si calcolino le derivate parziali di $Q$ e $P$ rispetto a $q$ e $p$, e si dimostri che la trasformazione è canonica verificando che si conservano le parentesi di Poisson fondamentali.

(2) Si dimostri che $qp = -QP$ e si utilizzi tale risultato per ricavare $q$ in termini di $Q$ e $P$ a partire dall'espressione di $P$ in termini di $q$ e $p$.

(3) Esplicitando anche $p$ in funzione di $Q$ e $P$, si calcoli la trasformazione inversa della trasformazione data.

(4) Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F(q,P)$.

(5) Si consideri il sistema hamiltoniano descritto dall'hamiltoniana $H(q,p) = q^2(1+qp)(1-qp)^{-1}$ : si calcoli l'hamiltoniana nelle variabili $(Q,P)$.

(6) Si usi il risultato del punto precedente per determinare esplicitamente la soluzione $(q(t), p(t))$ con dati iniziali $(q(0), p(0)) = (1, 0)$.

**Soluzione.** Se si definisce $A := \sqrt{(1-qp)/(1+qp)}$, si può riscrivere $Q = -pA$ e $P = qA^{-1}$, così che si trova

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = -p\frac{\partial A}{\partial q}, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = -A - p\frac{\partial A}{\partial p}, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = \frac{1}{A} - \frac{q}{A^2}\frac{\partial A}{\partial q}, \quad \frac{\partial P}{\partial p} = -\frac{q}{A^2}\frac{\partial A}{\partial p}$$

,

dove

$$\frac{\partial A}{\partial q} = \frac{1}{2A}\frac{-p(1+qp) - p(1-qp)}{(1+qp)^2} = -\frac{1}{A}\frac{p}{(1+qp)^2}$$
$$\frac{\partial A}{\partial p} = \frac{1}{2A}\frac{-q(1+qp) - q(1-qp)}{(1+qp)^2} = -\frac{1}{A}\frac{q}{(1+qp)^2}$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned}\{Q,P\} &= \frac{qp}{A^2}\frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial A}{\partial p} + \left(A + p\frac{\partial A}{\partial p}\right)\left(\frac{1}{A} - \frac{q}{A^2}\frac{\partial A}{\partial q}\right) \\ &= \frac{qp}{A^2}\frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial A}{\partial p} + 1 + \frac{p}{A}\frac{\partial A}{\partial p} - \frac{q}{A}\frac{\partial A}{\partial q} - \frac{qp}{A^2}\frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial A}{\partial p} = 1 + \frac{p}{A}\frac{\partial A}{\partial p} - \frac{q}{A}\frac{\partial A}{\partial q}\end{aligned}$$

e, ponendo $qp = x$, si trova

$$\frac{\partial A}{\partial q} = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q} = p\frac{\partial A}{\partial x}, \quad \frac{\partial A}{\partial p} = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} = q\frac{\partial A}{\partial x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{p}{A}\frac{\partial A}{\partial p} - \frac{q}{A}\frac{\partial A}{\partial q} = \frac{qp}{A}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{qp}{A}\frac{\partial A}{\partial x} = 0$$

da cui segue che $\{Q,P\} = 1$; poiché si ha banalmente $\{Q,Q\} = \{P,P\} = 0$, se ne deduce che la trasformazione è canonica.

Moltiplicando tra loro $Q$ e $P$, si trova immediatamente che $QP = -qp$. Dall'espressione di $P$ in teermini di $q$ e $p$ si trova
$P^2(1-qp) = q^2(1+qp) \Longrightarrow P^2(1+QP) = q^2(1-QP) \Longrightarrow q^2 = P^2\frac{1+QP}{1-QP} \Longrightarrow q = P\sqrt{\frac{1+QP}{1-QP}}$,
dove si è utilizzato che $P$ e $q$ devono avere lo stesso segno (per definizione di $P$). Si ha inoltre

$$p = -\frac{QP}{q} = -\frac{QP}{P}\sqrt{\frac{1-QP}{1+QP}} = -Q\sqrt{\frac{1-QP}{1+QP}}$$

così che in conclusione la trasformazione inversa è data da

$$\begin{cases} q = P\sqrt{\frac{1+QP}{1-QP}} \\ p = -Q\sqrt{\frac{1-QP}{1+QP}} \end{cases}$$

Per determinare una funzione generatrice di seconda specie $F(q,P)$, innanzitutto si esprime $p$ in termini di $q$ e $P$, i.e.

$$P^2(1-qp) = q^2(1+qp) \quad \Longrightarrow \quad P^2 - q^2 = pq\left(q^2+P^2\right) \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{P^2-q^2}{q\left(q^2+P^2\right)},$$

e si impone che $p$ sia uguale a $\partial F/\partial q$; si scrive quindi

$$\frac{P^2-q^2}{q\left(q^2+P^2\right)} = \frac{A}{q} + \frac{Bq+C}{q^2+P^2} \quad \Longrightarrow \quad A = 1, \quad B = -2, \quad C = 0$$

così che si ottiene

$$F(q,P) = \int \mathrm{dq}\left(\frac{1}{\mathrm{q}} - \frac{2\mathrm{q}}{\mathrm{q}^2+\mathrm{P}^2}\right) = \log\mathrm{q} - \log\left(\mathrm{q}^2+\mathrm{P}^2\right) + \mathrm{c}_1(\mathrm{P})$$

dove $c_1(P)$ è una funzione arbitraria di $P$. Si ha inoltre

$$Q = -\frac{qp}{P} = -\frac{q}{P}\frac{P^2-q^2}{q\left(q^2+P^2\right)} = \frac{P^2-q^2}{P\left(q^2+P^2\right)}$$

così che, imponendo che $Q$ sia uguale a $\partial F/\partial P$ e ragionando come prima, si trova

$$F(q,P) = \int \mathrm{dP}\left(\frac{1}{\mathrm{P}} - \frac{2\mathrm{P}}{\mathrm{q}^2+\mathrm{P}^2}\right) = \log\mathrm{P} - \log\left(\mathrm{q}^2+\mathrm{P}^2\right) + \mathrm{c}_2(\mathrm{q})$$

dove $c_2(q)$ è una funzione arbitraria di $q$. Infine, imponendo che le due espressioni di $F(q,P)$ coincidano, si ottiene la funzione generatrice di seconda. In conclusione la soluzione assume la forma:

$$q(t) = \sqrt{\frac{1+2t}{1-2t}}, \quad p(t) = -2t\sqrt{\frac{1-2t}{1+2t}},$$

**Question 4.** Si considerino le equazioni del moto

$$\begin{cases} \dot{q} = q^2 p \\ \dot{p} = -p^2 q - 1/q \end{cases}$$

per $q > 0$ e $p \in \mathbb{R}$
(1) Si riconosca che tale sistema di equazioni è Hamiltoniano e si determini l'Hamiltoniana corrispondente.
(2) Si calcoli la trasformazione canonica associata alla funzione generatrice di seconda specie $G(q, P) = P \log q$
(3) Si determini l'Hamiltoniana nelle nuove variabili $Q, P$. Si calcolino e risolvano le corrispondenti equazioni di Hamilton.
(4) Si usi la trasformazione determinata sopra, nonché la soluzione delle equazioni del moto nelle variabili $(Q, P)$, per risolvere le equazioni del moto originali per le variabili $(q, p)$, in corrispondenza dei dati iniziali $q(0) = p(0) = 1$. Si verifichi esplicitamente che la soluzione trovata risolve le equazioni del moto originali.

**Soluzione.** (1) Il sistema assegnato è Hamiltoniano se e solo se esiste $H(q, p)$ tale che $\partial_p H(q, p) = q^2 p$ e $\partial_q H(q, p) = p^2 q + 1/q$. Integrando le due equazioni troviamo

$$H(q, p) = \frac{q^2 p^2}{2} + \log q$$

(2) La trasformazione canonica associata alla funzione generatrice di seconda specie $G(q, P) = P \log q$ è tale che

$$p = \frac{\partial G}{\partial q} = \frac{P}{q}, \quad Q = \frac{\partial G}{\partial P} = \log q$$

che si può invertire in:

$$\begin{cases} Q = \log q, \\ P = qp, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = e^Q \\ p = Pe^{-Q} \end{cases}$$

che è proprio la trasformazione canonica richiesta.

(3) L'Hamiltoniana nelle nuove variabili è

$$\tilde{H}(Q, P) = \frac{P^2}{2} + Q,$$

le cui equazioni di Hamilton sono:

$$\begin{cases} \dot{Q} = P, \\ \dot{P} = -1. \end{cases}$$

(4) La soluzione alle equazioni di Hamilton nelle variabili $(Q, P)$ è

$$P(t) = P(0) - t, \quad Q(t) = Q(0) + P(0)t - \frac{t^2}{2}.$$

I dati iniziali nelle variabili $(Q, P)$ corrispondenti a $q(0) = p(0) = 1$ sono: $Q(0) = \log 1 = 0$ e $P(0) = 1$. La soluzione $(Q(t), P(t))$ con tale dato iniziale è quindi

$$Q(t) = t - \frac{t^2}{2}, \quad P(t) = 1 - t.$$

La soluzione nelle variabili originali è

$$q(t) = e^{Q(t)} = e^{t - t^2/2}, \quad p(t) = (1 - t)e^{-t + t^2/2}.$$

Per verificare che tale legge oraria soddisfa le equazioni di Hamilton originali, calcoliamo le derivate:

$$\dot{q}(t) = (1 - t)e^{t - t^2/2} \stackrel{?}{=} q^2(t)p(t),$$
$$p(t) = -e^{-t + t^2/2} - (1 - t)^2 e^{-t + t^2/2} \stackrel{?}{=} -q(t)p^2(t) - \frac{1}{q(t)}$$

Usando che $q(t) = e^{t-t^2/2}$ e $p(t) = (1-t)e^{-t+t^2/2}$ si verifica immediatamente che tali relazioni sono verificate, come desiderato.